

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Automatique-Productique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Simona Adriana MIHĂIȚĂ

Thèse dirigée par **Hassane ALLA** et **Stéphane MOCANU**

préparée au sein du **GIPSA-Lab** dans l'école doctorale **EEATS**

Approche probabiliste pour la commande orientée événement des systèmes stochastiques à commutation

Thèse soutenue publiquement le **18 Septembre 2012**,
devant le jury composé de :

M. Christophe BERENQUER

Professeur, Grenoble INP, Président

M. Jean-Claude HENNET

Directeur de Recherche CNRS, Université Paul Cézanne Marseille,
Rapporteur

M. Etienne CRAYE

Professeur, École Centrale de Lille, Rapporteur

M. Eric NIEL

Professeur, INSA de Lyon, Examineur

M. Hassane ALLA

Professeur, UJF Grenoble, Directeur de thèse

M. Stéphane Mocanu

Maître de Conférences, INP Grenoble, Co-directeur de thèse



Remerciements

Je tiens à adresser mes plus sincères remerciements et ma pleine reconnaissance à mes deux directeurs de thèse : M. Stéphane Mocanu pour tout son aide à travers le long travail de thèse, sa patience et ses indications précises et minutieuses, et M. Hassane Alla pour son soutien et son encouragement dans les moments difficiles. Votre soutien constant m'a beaucoup encouragé de continuer et d'approfondir l'activité de recherche.

Je tiens à remercier également les membres du Jury, qui ont accepté de juger mon travail : M. Christophe Berenguer pour m'avoir fait l'honneur de présider la soutenance et d'examiner mon travail, M. Jean-Claude Hennet, M. Etienne Craye et M. Eric Niel pour avoir accepté d'examiner en profondeur mon travail, ainsi que pour tous leurs commentaires constructifs.

J'exprime également ma reconnaissance aux professeurs de Gipsa-lab, et particulièrement aux membres de l'équipe SYSCO pour toutes les réunions constructives organisées au sein de l'équipe. Les séminaires organisés périodiquement dans le laboratoire ont représenté une bonne occasion d'améliorer et d'ouvrir des nouvelles perspectives dans le travail de recherche.

Je voudrais remercier aussi tous mes amis et collègues de Gipsa-lab, qui ont emporté chacun leur touche personnelle à travers toutes les activités organisées ensemble, surtout dans le cadre de l'association GipsaDoc : Oumayma, Andra, Lizeth, Amine, Lam, Joumana, Ignacio, Humberto, Maria, Felipe, Gabriel, Valentina, Rogelio, Augustin, Sara, Sonia, Antoine, Federico, Pham, Irfan, Jennifer, Emilie, Vincent, Chloe, Yo, Patricia.

Un grand merci à ma chère collègue de bureau Oumayma, qui m'a encouragé et m'a accompagné pendant mes trois années de thèse. Un grand merci aussi à Augustin et Caroline pour m'avoir aidé à corriger le mémoire.

Je tiens à remercier dans un mode très spécial tous mes amis de Grenoble avec lesquels j'ai connu cette merveilleuse ville entourée par les montagnes et j'ai passé des moments très jolis : Cristina, Paul, Tatiana, Alexandra, Lavinia, Mirela, Sorin, Ruth, Adrian, Vasile, Petre, Linda, Mihai, Augustin, Laurentiu, Ciprian, Vladimir, Daniela, Irina, Florin, Vicente, David, Jose Luis, Michelle, Arnaud, Juan Francisco, Delphine.

Dernièrement je voudrais exprimer ma profonde et sincère gratitude à ma famille : vous êtes toujours dans mon cœur par tout dans le monde et je vous aime pour tout l'aide

que vous m'avez donné jusqu'à ce point. Merci beaucoup maman de m'avoir toujours encouragé et aidé à réussir dans tous les défis. Merci papa d'être à côté de moi dans tous les concours et les étapes difficiles de la vie. Merci Denisa pour ton sourire et ta joie de vivre.

Et finalement, un grand merci à Andrei, pour m'avoir donné l'espoir et le courage de faire tomber les barrières, afin de continuer mon travail quand toutes les portes ont été fermées. Je ne vais jamais oublier.

Adriana Simona MIHĂIȚĂ

Grenoble, France

18 Septembre 2012

Résumé

Les systèmes hybrides sont des systèmes dynamiques, caractérisés par un comportement dual, une interaction entre une partie discrète et une partie continue de fonctionnement. Dans le centre de notre travail se trouve une classe particulière de systèmes hybrides, plus spécifiquement les systèmes stochastiques à commutation que nous modélisons à l'aide des Chaînes de Markov en temps continu et des équations différentielles.

Le comportement aléatoire de ce type de système nécessite une commande spéciale qui s'adapte aux événements arbitraires qui peuvent changer complètement l'évolution du système. Nous avons choisi une politique de contrôle basée sur les événements qui est déclenchée seulement quand il est nécessaire (sur un événement incontrôlable - par exemple un seuil qui est atteint), et jusqu'à ce que certaines conditions de fonctionnement sont remplies (le système revient dans l'état normal).

Notre approche vise le développement d'un modèle probabiliste qui permet de calculer un critère de performance (en occurrence l'énergie du système) pour la politique de contrôle choisie. Nous proposons d'abord une méthode de simulation à événements discrets pour le système stochastique à commutation commandé, qui nous donne la possibilité de réaliser une optimisation directe de la commande appliquée sur le système et aussi de valider les modèles analytiques que nous avons construit pour l'application du contrôle.

Un modèle analytique pour déterminer l'énergie consommée par le système a été conçu en utilisant les probabilités de sortie de la région de contrôle, respectivement les temps de séjour dans la chaîne de Markov avant et après avoir atteint les limites de contrôle. La dernière partie du travail présente la comparaison des résultats obtenus entre la méthode analytique et la simulation.

Mots-clés : systèmes stochastiques à commutation, contrôle basé sur les événements, temps de sortie

Abstract

Hybrid systems are dynamical systems, characterized by a dual behaviour, a continuous interaction between a discrete and a continuous functioning part. The center of our work is represented by a particular class of hybrid systems, more specific by the stochastic switching systems which we model using continuous time Markov chains and differential equations.

The random behaviour of such systems requires a special command which adapts to the arbitrary events that can completely change the evolution of the system. We chose an event-based control policy which is triggered only when it's necessary (on an unforeseen event - for example when a threshold that is reached), and until certain functioning conditions are met (the system returns in the normal state).

Our approach aims to develop a probabilistic model that calculates a performance criterion (in this case the energy of the system) for the proposed control policy. We start by proposing a discrete event simulation for the controlled stochastic switching system, which gives us the opportunity of applying a direct optimisation of the control command. It also allows us to compare the results with the ones obtained by the analytical models we have built when the event-based control is applied.

An analytical model for computing the energy consumed by the system to apply the control is designed by using the exit probabilities of the control region, respectively, the sojourn times of the Markov chain before and after reaching the control limits. The last part of this work presents the results we have obtained when comparing the analytical and the simulation method.

Emph Keywords : stochastic switching systems, event-based control, exit time

Table des matières

Introduction	xix
1 État de l'art	1
1.1 Introduction	1
1.2 Systèmes dynamiques	1
1.2.1 Modélisation de l'espace d'états	2
1.2.2 La notion d'événement	4
1.3 Notions de probabilité	5
1.3.1 Variables aléatoires	5
1.3.2 Processus stochastique	8
1.3.3 Processus de Markov	9
1.4 Chaînes de Markov	10
1.4.1 Chaînes de Markov en Temps Continu (CMTC)	10
1.4.2 Chaînes de Markov avec des Taux de Variation (CMTV)	13
1.5 Systèmes stochastiques à commutation (SSC)	17
1.5.1 Systèmes hybrides	17
1.5.2 Systèmes hybrides stochastiques	24
1.5.3 Systèmes stochastiques à commutation	25
1.6 Contrôle basé sur les événements (CBE)	29
1.7 Modèle de base de système stochastique à commutation avec CBE	32
1.8 Conclusions	35
2 Intégrateur stochastique à commutation à états multiples	37

2.1	Modèle non contrôlé	37
2.2	Modèle avec contrôle	39
2.3	Critère quadratique de performance	43
2.4	Intégrateurs interconnectés	44
2.5	Conclusions	47
3	Simulation événementielle en temps continu pour les SSC	49
3.1	Introduction	49
3.2	Simulation à temps continu	51
3.3	Application numérique	58
3.3.1	Intégrateur contrôlé versus non contrôlé	58
3.3.2	Le nombre de simulations	60
3.3.3	Critère quadratique de performance dans la simulation	60
3.3.4	Temps de calcul	62
3.4	Conclusions	64
4	Modèle analytique	67
4.1	Introduction	67
4.2	Probabilités de sortie	71
4.3	Temps moyens de sortie	75
4.4	Temps moyens de sortie caractéristiques à chaque état	80
4.5	Temps de contrôle	83
4.6	Energies	87
4.7	Conclusions	88
5	Comparaison des résultats analytiques et de la simulation	89
5.1	Moments de performabilité sans contrôle	89
5.2	Probabilités et temps de sortie	92
5.3	Résultats des temps de sortie caractéristiques à chaque état	101
5.4	Résultats des temps de contrôle	104
5.5	Energies de contrôle	107

5.6	Coût quadratique total	109
5.7	Problèmes numériques	110
5.8	Conclusions	111
	Conclusions générales	113
	Bibliographie	116

Table des figures

1.1	Réalisations de $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$	2
1.2	Système mécanique et son modèle pour l'Exemple 1.2.1	3
1.3	Relation entre FDC et FDP.	7
1.4	La fonction de distribution de probabilité	8
1.5	Modèle de CMTV	15
1.6	Systèmes hybrides	18
1.7	Processus simple de modélisation	19
1.8	Automate à états finis	21
1.9	Automate hybride	23
1.10	Automate stochastique hybride	26
1.11	Signal de commutation	27
1.12	Systèmes en boucle fermée avec contrôle basé sur les événements.	31
1.13	Réservoir d'eau avec débit d'entrée et de sortie	33
1.14	Contrôle appliqué aux limites	34
2.1	Représentation stochastique hybride	38
2.2	Réalisation de $X(t), Z(t), Y(t)$	39
2.3	Trajectoire aléatoire d'un intégrateur à commutation non contrôlé	40
2.4	Diverses trajectoires possibles de l'intégrateur à commutation avec contrôle.	42
2.5	Représentation stochastique hybride pour l'intégrateur commuté	43
2.6	Automate stochastique hybride pour l'intégrateur commuté	44

2.7	Automate pour l'intégrateur commuté aux états multiples	45
2.8	Multiples réservoirs interconnectés	46
3.1	Simulation en SimEvents	51
3.2	a) Historique de la variable d'état $X(t)$ et des b) statistiques $X_{st}(t)$	58
3.3	Dynamique continue	59
3.4	Application du contrôle basé sur les événements	59
3.5	Comparaison pour le premier moment de performabilité	60
3.6	Variation d'énergie pour l'intégrateur à commutation considéré.	61
3.7	Variation d'énergie pour un intégrateur commuté à quatre états.	63
3.8	T_c par rapport à T_f , N_r et N	64
4.1	Scénarios d'évolution du système à partir de X_H et X_L	68
4.2	Probabilités de sortie à partir de X_H et X_L	72
4.3	Conditions aux limites pour les probabilités de sortie $\pi_{up}^j(x)$ et $\pi_{dw}^j(x)$	75
4.4	Temps moyens de sortie	79
4.5	Temps moyens de sortie T_1, T_3, T_5, T_7	80
4.6	Temps moyens de sortie dans un état j	82
4.7	Temps moyen total de sortie	82
4.8	Le temps de contrôle supérieur T_2	86
5.1	Erreurs méthode analytique - simulation pour a) $m_1(t)$ et b) $m_2(t)$	90
5.2	Intégrateur avec différents taux de variation	91
5.3	Erreurs $m_1(t)$, $m_2(t)$ (intégrateur avec différents taux de variation)	92
5.4	Erreurs $m_1(t)$, $m_2(t)$ avec contrôle (différents taux de variation)	92
5.5	Probabilités de sortie vers X_{min} et X_{max}	95
5.6	Fonctions $\vec{\gamma}_{up}(x)$ et $\vec{\gamma}_{dw}(x)$	96
5.7	Temps de sortie vers X_{min} et X_{max} (intégrateur à deux états)	97
5.8	Probabilités et temps de sortie pour un intégrateur à quatre états	98

5.9 Temps moyens de sortie vers X_{min} et X_{max} caractéristiques à chaque état. 102

5.10 Les temps de contrôle supérieur $T_2 = T_8$ et $T_4 = T_6$ 104

Liste des tableaux

3.1	Liste de tous les événements possibles	52
3.2	Temps de calcul T_c en fonction de la longueur de la simulation T_f	64
3.3	Temps de calcul T_c en fonction du nombre de simulations N_r	64
3.4	Temps de calcul T_c en fonction du nombre d'états N	64
5.1	Probabilités de sortie vers X_{max}, X_{min}	94
5.2	Temps de sortie pour un intégrateur commuté à deux états	97
5.3	Les temps de sortie vers X_{max}, X_{min} pour un intégrateur à quatre états.	99
5.4	Probabilité de départ, en X_H et X_L , dans différents états.	100
5.5	Les probabilités des scénarios pour chaque états du système.	100
5.6	Temps de sortie en partant de X_H, X_L	103
5.7	Ensembles de paramètres pour les simulations.	103
5.8	Comparaisons entre les temps de sortie	103
5.9	Temps de contrôle pour diverses paramètres de contrôle	106
5.10	Temps de contrôle pour un intégrateur à quatre états	107
5.11	Les énergies de contrôle pour un intégrateur à deux états.	108
5.12	Les énergies de contrôle pour un intégrateur à quatre états.	108
5.13	Les paramètres des deux intégrateurs à deux états considérés.	109
5.14	Coût quadratique pour les intégrateurs à deux états.	109
5.15	Temps de sortie pour l'intégrateur exception	110
5.16	Temps de contrôle pour l'intégrateur exception	111

Introduction

La prise en compte de la complexité des systèmes, comme les commutations entre divers modes de fonctionnement, ou la présence d'événements aléatoires, nécessite l'étude de modèles plus complexes que les systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles. La modélisation stochastique joue un rôle très important dans beaucoup de domaines où les systèmes présentent des discontinuités de fonctionnement, provoquées par des événements aléatoires. Les systèmes caractérisés par une interaction de comportements continus et discrets portent le nom de *systèmes hybrides* et sont largement utilisés dans les réseaux de communication, dans les chaînes de fabrication, dans la robotique, etc.

Une grande partie des études de la littérature a été réalisée sur des systèmes hybrides déterministes qui, souvent, ne sont pas adaptées aux incertitudes de fonctionnement inhérentes (aux événements externes aléatoires). Le besoin de réaliser une analyse probabiliste plus fine sur les systèmes comprenant des incertitudes, a mené les études à une classe de systèmes qui prend en compte les transitions aléatoires d'un état à l'autre. Nous parlons des *systèmes stochastiques hybrides*, avec des temps de séjour aléatoires pour chaque état. Cette classe de systèmes trouve des champs d'applications dans l'industrie énergétique, dans l'évaluation des assurances, dans les processus flexibles de fabrication, dans l'implémentation de la commande tolérante aux défauts, etc.

Notre attention se concentre sur une classe particulière de systèmes hybrides à temps continu, présentant des changements aléatoires entre différents états de fonctionnement (déterminés par des événements externes), que nous appelons les *systèmes stochastiques à commutation* (SSC).

Si on considère que les occurrences des événements aléatoires futurs ne dépendent que de l'état actuel du système, il est alors possible de modéliser la commutation à l'aide de chaînes de Markov en temps continu qui vont nous permettre d'établir plus facilement les propriétés du système.

Malgré une grande flexibilité de modélisation, les problèmes qui apparaissent dans les systèmes stochastiques à commutation sont en général très ardues : les solutions analytiques sont difficiles à obtenir et assez peu d'algorithmes existent pour réaliser leur

simulation en temps continu. Par ailleurs l'analyse de ces systèmes de nature hybride et stochastique, avec des événements externes modifiant leur dynamique, devient plus difficile si nous y ajoutons le problème de synthèse de la commande. Appliquer le contrôle pour des systèmes ayant une dynamique avec des ruptures aléatoires est une tâche difficile à réaliser, même pour des systèmes très simples. L'approche classique de la commande d'un système stochastique hybride est basée soit sur une commande continue déterministe (un contrôleur suffisamment robuste afin de compenser les effets aléatoires), soit sur une approche discrète probabiliste (les actions ponctuelles sont alors exécutées, selon l'état du système et un coût à minimiser).

Notre approche consiste à utiliser une technique de commande hybride appelée *contrôle basé sur les événements*. Dans plusieurs systèmes industriels, réseaux de communication, systèmes biologiques, ce type de contrôle permet d'appliquer la commande seulement quand il est nécessaire (à la suite d'événements incontrôlables - par exemple l'atteinte d'un seuil), jusqu'à ce que certaines conditions de fonctionnement soient à nouveau remplies (le système revient dans l'état normal de fonctionnement).

Dans ce mémoire qui s'organise en cinq chapitres, nous développons une approche qui vise à construire un modèle probabiliste et qui permet de calculer un critère de performance (en l'occurrence, l'énergie du système) pour la politique de contrôle proposée.

Les cinq chapitres de ce mémoire sont les suivants :

Le premier chapitre, "***État de l'art***", présente les notions théoriques et les formalismes de modélisation que nous utilisons. Nous introduisons d'un premier temps la notion de système dynamique ayant un comportement aléatoire, suivi par la présentation des notions de probabilité et de processus stochastiques que nous allons utiliser. Nous introduisons également le type de chaînes de Markov que nous utilisons pour la modélisation, et leurs propriétés. Afin de définir les systèmes stochastiques à commutations, nous utilisons les automates stochastiques hybrides et des exemples afférents. Dans la dernière partie de ce chapitre nous présentons les notions de base concernant le contrôle basé sur les événements, suivies par un exemple de système stochastique à commutation avec contrôle.

Dans le deuxième chapitre, "***Intégrateur stochastique à commutation à états multiples***", nous présentons le modèle au centre de nos études ainsi que ses caractéristiques de fonctionnement. Dans ce chapitre nous présentons également les hypothèses de travail et les conditions initiales sur les variables aléatoires et les contraintes. De plus, nous définissons la manière dont le contrôle basé sur les événements est appliqué au système étudié.

Le troisième chapitre, "***Simulation événementielle en temps continu pour les SSC***", présente la méthode de simulation à événements discrets en temps continu que nous proposons pour les systèmes stochastiques à commutation considérés. Nous

présentons aussi les résultats numériques que nous avons obtenus en appliquant la méthode pour différentes variations de paramètres de contrôle. Cette méthode nous permet aussi de déterminer l'énergie minimale consommée pour appliquer le contrôle basé sur les événements, sur un grand nombre de simulations avec une durée de simulation variable. La méthode de simulation nous aidera à valider notre contribution probabiliste qui sera présentée dans le chapitre suivant.

Dans le quatrième chapitre, “*Modèle analytique*”, nous présentons le modèle probabiliste d'énergie stationnaire que nous avons construit pour le système de base étudié. La formule de l'énergie totale est construite à partir de certaines caractéristiques du système qui sont calculées indépendamment : les moments de performabilité d'ordre 1 et 2 de la variable d'état, les probabilités de sortie de la région de contrôle, les temps moyens de sortie de cette région et les temps moyens d'application du contrôle.

Dans le dernier chapitre de ce mémoire, “*Comparaison des résultats analytiques et de la simulation*”, nous comparons les résultats issus des méthodes analytiques que nous avons proposées, avec les résultats de simulations. On étudie successivement plusieurs cas concrets à partir de systèmes simples (avec deux états) jusqu'à des systèmes plus complexes. Nous présentons les résultats obtenus permettant de valider les moments de performabilité, les probabilités et les temps de sortie de la région de contrôle, suivis par les résultats numériques des temps de contrôle. La validation numérique de ces paramètres permet également de valider les énergies de contrôle, et par conséquent la validation globale du critère de performance considéré.

A la suite de ces cinq chapitres, on conclura de manière générale sur le travail effectué, en rappelant les apports principaux, les limitations, et on présentera les perspectives de recherche dans ce domaine.

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire Gipsa-lab de Grenoble, dans le Département Automatique - Productique.

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Introduction

Notre travail se concentre sur une classe spéciale de systèmes hybrides, plus spécifiquement sur les systèmes stochastiques à commutation. Avant d'entrer dans les détails de ce type de système particulier, nous allons présenter dans la Section 1.2 les notions de base des systèmes dynamiques qui vont nous permettre d'analyser son fonctionnement et la manière dont nous allons les utiliser. Dans la Section 1.3 nous présentons des notions de probabilité qui vont nous aider à définir dans la Section 1.4 les Chaînes de Markov, utilisées pour la modélisation des systèmes stochastiques à commutation (SSC). C'est dans la Section 1.5 que nous allons définir les systèmes stochastiques à commutation, suivi par la présentation du contrôle basé sur les événements (CBE) dans la Section 1.6. Un exemple de système stochastique à commutation pour lequel le contrôle basé sur les événements sera appliqué est présenté à la fin de ce chapitre.

1.2 Systèmes dynamiques

Historiquement, les ingénieurs et les scientifiques ont mené leurs recherches sur l'étude des phénomènes naturels qui peuvent être modélisés, par exemple, par les lois de gravité, par les lois de mécanique classique, les lois chimiques, etc., et qui comprennent des variables continues telles que : la vitesse, l'accélération, la pression, la température ou le débit des fluides. Fondée sur ces caractéristiques, une large gamme d'outils techniques et mathématiques a été développée pour la modélisation, l'analyse et le contrôle de ces systèmes. Parfois dans certains systèmes réels (systèmes manufacturiers, réseaux de communication, etc.) on constate que le comportement dépend de certains *événements* instantanés : appuyer sur un bouton, freiner à cause d'un obstacle sur la route,

le changement du feu de circulation, etc. Dans cette section nous allons introduire la notion de système dynamique dont le comportement est sous l'influence des événements externes aléatoires.

1.2.1 Modélisation de l'espace d'états

En général, un système dynamique sur un espace d'états fini est défini par l'ensemble des équations suivantes [Cassandras & Lafortune, 1999] :

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (1.2.1)$$

$$\vec{y}(t) = \vec{g}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) \quad (1.2.2)$$

où $\vec{u}(t)$ est le vecteur des variables d'entrée, $\vec{y}(t)$ le vecteur des variables de sortie, $\vec{x}(t)$ le vecteur des variables d'état $\{x_1(t), x_2(t) \dots\}$, $\vec{f}(\cdot)$ et $\vec{g}(\cdot)$ sont des fonctions qui donnent aux systèmes la caractéristique d'être *linéaires* ou *non linéaires*. Si nous écrivons l'équation (1.2.1) dans le cas scalaire :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad x(t_0) = x_0$$

et supposant que nous choisissons une fonction d'entrée spécifique $u(t) = u^1(t)$, et les conditions initiales au moment $t = 0, x(0) = x_0$, alors la solution de l'équation différentielle est une fonction particulière $x^1(t)$. Si nous avons une famille de fonctions d'entrée $\{u^1(t), u^2(t), \dots\}$, nous allons obtenir une famille de solutions $\{x^1(t), x^2(t) \dots\}$, comme représenté dans la Figure 1.1 :

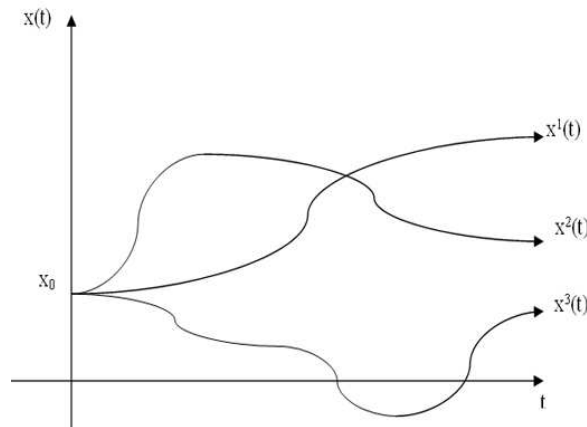


FIGURE 1.1 – Réalisations de $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$

La description la plus simple d'un système dynamique se fait à travers des exemples pratiques. Nous allons donner un exemple classique de système dynamique afin d'illustrer ses caractéristiques.

Exemple 1.2.1

[Cassandras & Lafortune, 1999] Prenons le système représenté dans la Figure 1.2. Au moment $t = 0$ nous déplaçons la masse de la position de repos avec une quantité $u(0) = u_0 > 0$ et nous la libérons. Soit $y(t)$ le déplacement à tout moment $t > 0$. Selon les lois de la mécanique pure, le mouvement de masse est décrit par :

$$m\ddot{y} = -ky \quad (1.2.3)$$

avec les conditions initiales $y(0) = u_0$, $\dot{y}(0) = 0$ et k, m constantes. Si nous voulons contrôler le mouvement initial u_0 et observer la position de la masse comme fonction de temps, alors un modèle comme celui de la Figure 1.2 est approprié ; la sortie est la solution de l'équation (1.2.3) et l'entrée du système est définie comme :

$$u(t) = \begin{cases} u_0 & , \text{si } t = 0 \\ 0 & , \text{sinon} \end{cases} \quad (1.2.4)$$

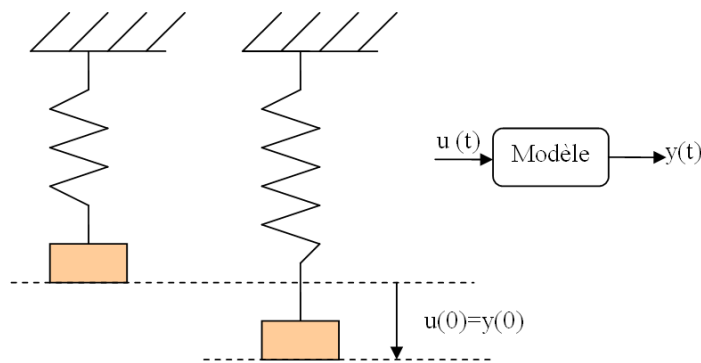


FIGURE 1.2 – Système mécanique et son modèle pour l'Exemple 1.2.1

Nous appelons ce type de systèmes les *systèmes dynamiques* et souvent la relation entrée-sortie est exprimée avec l'aide des équations différentielles. Supposons que la masse attachée au ressort est un conteneur avec du liquide qui a une faible fuite après $t = 0$, alors nous observons l'évolution du système dans l'intervalle $[0, t_1]$. Au moment $t = t_1$ nous déplaçons la masse dans la position de repos et nous appliquons de nouveau la déformation u_0 dans l'intervalle $[t_1, 2t_1]$. Comme la masse du conteneur a changé, la sortie du système est maintenant différente, de ce fait $g(\cdot)$ dépend de t dans l'équation (1.2.2).

Les systèmes dynamiques représentent le point de départ pour les notions que nous allons introduire dans les sections suivantes.

1.2.2 La notion d'événement

La définition d'état du système est basée sur la capacité de prévoir au moment $t = t_0$ le comportement d'un système à partir des entrées $u(t)$. Mais cette caractéristique ne prend pas en compte la nature imprévisible de l'entrée du modèle. L'état des certains systèmes est affecté en continu par des événements externes et aléatoires comme par exemple : les conditions météorologique défavorables ou le trafic intense dans les réseaux de transport, les défaillances des machines de production ou le manque de matières dans les systèmes de production, etc.

On définit un système comme *stochastique* si au moins une des variables de sortie est aléatoire, sinon le système est dit *déterministe*. En général, l'état d'un système dynamique stochastique est défini par un processus aléatoire. Le comportement d'un tel système est couramment décrit d'une manière probabiliste par sa fonction de distribution de probabilité.

Quand nous parlons d'un *événement* qui a changé le comportement du système, nous parlons d'une transition instantanée d'un état du système à un autre. Un événement peut s'identifier par une action spécifique (provoquée par une personne), avec l'apparition de phénomènes incontrôlables (un ordinateur qui s'est arrêté) ou tout simplement avec une condition de fonctionnement qui est atteinte (un réservoir d'eau qui arrive à sa limite maximale).

Nous allons utiliser la notation e pour un événement, et E pour l'ensemble discret des divers événements.

Exemple 1.2.2

Considérons un entrepôt contenant des produits finis d'une usine. Quand un produit est fini dans l'usine, il "arrive" à l'entrepôt et il est stocké. Périodiquement, un camion arrive pour charger les produits. Le besoin est de connaître à chaque instant de temps combien de produits sont dans l'entrepôt. En analysant le système nous pouvons déterminer les événements principaux qui affectent l'état du système : *l'arrivée d'un produit* (P) et *l'arrivée d'un camion* (C). Dans ce cas, l'ensemble d'événements E est :

$$E = \{P, C\}$$

À partir des notions que nous avons données dans cette section, nous pouvons maintenant définir les principales caractéristiques des systèmes qui font l'objet de nos études : les *systèmes dynamiques stochastiques*. Dans les sections suivantes nous allons définir et introduire d'un point de vue scientifique ce type de systèmes et leur aspect probabiliste. Avant d'entrer dans les détails de modélisation, quelques notions de probabilité sont présentées dans la Section 1.3.

1.3 Notions de probabilité

1.3.1 Variables aléatoires

Les notions suivantes vont établir les caractéristiques stochastiques de notre système ; elles sont présentées dans plusieurs ouvrages dédiés au calcul des probabilités, comme par exemple dans [Foata & Fuchs, 2003], [Trivedi, 2001], [Gupta & Murray, 2010], etc. Plusieurs applications nécessitent l'utilisation des variables qui sont *continues* plutôt que discrètes. Dans cette section nous allons seulement définir la notion de variable aléatoire continue et les mesures de probabilités associées.

Considérons S l'ensemble des sorties (potentiellement infini) d'un système. Un sous-ensemble $A \subset S$ représente un événement. Deux événements A_1 et A_2 sont disjoints si $A_1 \cap A_2 = \{\emptyset\}$. Le complément d'un élément A est défini comme $\bar{A} = S \setminus A$. Une mesure de probabilité $P(\cdot)$ est définie sur S avec des valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ par les axiomes de probabilité suivantes :

1. $P(A) \geq 0$, pour tout $A \subset S$.
2. $P(S) = 1$.
3. Si $\{A_i, i = 1, 2, \dots\}$ est une collection d'événements disjoints deux à deux de type $A_i \cap A_j = \{\emptyset\}$ pour tous i, j , alors $P(\cup A_i) = \sum_i P(A_i)$.

Quand S est non dénombrable, nous ne pouvons pas attribuer des mesures de probabilité à tous les sous-ensembles de S . Soit \mathcal{F} la classe de sous-ensembles mesurables de S . Alors nous pouvons définir une variable aléatoire X sur l'espace de probabilité (S, \mathcal{F}, P) tel que $\{s | X(s) \leq x\}$ soit un événement. Nous utilisons les définitions de [Trivedi, 2001] dans la suite :

Définition 1.3.1. Une **variable aléatoire** X sur l'espace de probabilité (S, \mathcal{F}, P) est une fonction $X : S \rightarrow \mathbb{R}$ qui attribue une valeur réelle $X(s)$ à chaque point $s \in S$, tel que pour chaque nombre réel x , l'ensemble de points $\{s | X(s) \leq x\}$ soit un événement, c'est-à-dire un membre de \mathcal{F} .

Définition 1.3.2. La **fonction de distribution cumulative** (ou **FDC**) F_X d'une variable aléatoire X est définie comme :

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Une variable aléatoire continue X est complètement caractérisée par sa fonction de distribution de probabilité qui est une fonction continue en x pour tout $-\infty < x < +\infty$. Le plus souvent nous utilisons la notion $F(x)$ à la place de $F_X(x)$. La plupart des variables continues que nous utilisons ont une fonction de distribution continue, $F(x)$, pour laquelle la dérivée $dF(x)/dx$ existe.

La FDC ($F(x)$) respecte les propriétés suivantes :

(F1) $0 \leq F(x) \leq 1$ pour tout $-\infty < x < \infty$.

(F2) $F(x)$ est une fonction croissante et monotone.

(F3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Définition 1.3.3. *Pour une variable aléatoire continue, X , $f(x) = dF(x)/dx$ est nommée la **fonction de densité de probabilité** (ou FDP) de X .*

La fonction densité de probabilité nous permet d'obtenir la fonction de distribution cumulative par intégration :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

Nous pouvons aussi obtenir d'autres mesures utiles dans l'étude probabiliste, comme :

$$\begin{aligned} P(X \in (a, b]) &= P(a < X < b) \\ &= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\ &= \int_{-\infty}^b f_X(t)dt - \int_{-\infty}^a f_X(t)dt \\ &= \int_a^b f_X(t)dt \end{aligned}$$

La fonction de densité de probabilité ($f(x)$) satisfait les propriétés suivantes :

(f1) $f(x) \geq 0$ pour tout x .

(f2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

La relation entre les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ est représentée dans la Figure 1.3. Les probabilités sont représentées par les surfaces sous la courbe. La surface totale sous la courbe est l'unité.

Les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ caractérisent complètement le comportement d'une variable aléatoire continue. Mais parfois nous avons besoin d'une description plus simple de X comme, par exemple, une variable exacte plutôt que toute la fonction. Un exemple est l'**espérance** (ou la moyenne) notée $E[X]$ qui définie dans la suite :

Définition 1.3.4. [Trivedi, 2001] *L'espérance $E[X]$ d'une variable aléatoire continue est définie comme :*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \tag{1.3.1}$$

si l'intégrale est absolument convergente : $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx < \infty$; sinon $E[X]$ n'existe pas.

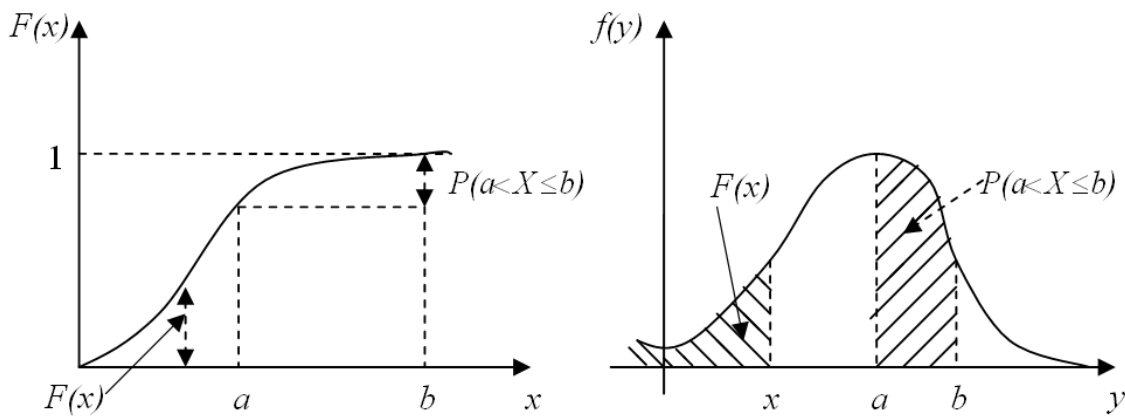


FIGURE 1.3 – Relation entre FDC et FDP.

D'autres mesures qui sont utilisées pour analyser le comportement de X sont les moments des différents ordres de X . Soit Y une fonction de X ($Y = \phi(X)$). En utilisant la Définition 1.3.4, nous pouvons écrire l'espérance de Y comme :

$$E[Y] = E[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(X)f(x)dx.$$

si l'intégrale est convergente. Un cas particulier d'intérêt est la fonction $\phi(X) = X^k$, $k = \{1, 2, \dots\}$. Dans ce cas, $E[X^k]$ est connu comme le **moment d'ordre k** de la variable X . A noter que le premier moment $E[X]$ est l'espérance que nous avons définie en (1.3.1). Si X et Y sont deux variables aléatoires avec les mêmes moments ($E[X^k] = E[Y^k]$) alors elles ont la même distribution.

Nous pouvons aussi définir le moment centré d'ordre k (m_k) de la variable X comme :

$$m_k = E[(X - E[X])^k] \quad (1.3.2)$$

Si $k = 2$ alors nous obtenons la **variance** de X , $Var(X)$, souvent noté σ^2 :

$$Var(X) = \sigma_x^2 = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x)dx$$

où σ_x est **l'écart type** de X . Comme $\mathbb{E}(\cdot)$ est un opérateur linéaire, la variance σ_X^2 peut se calculer aussi comme :

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

La variance et l'écart type sont des mesures qui dépendent de la “*dispersion*” de la distribution. Si X a une distribution “concentrée” (X prend des valeurs près de $E[X]$)

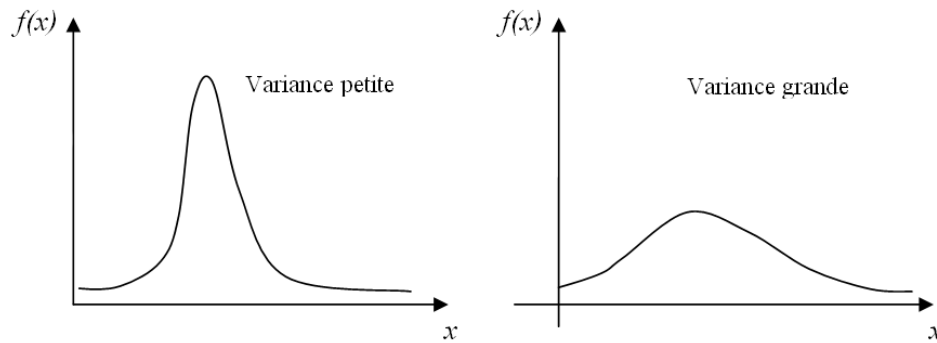


FIGURE 1.4 – a) FDP pour une distribution “concentrée” b) FDP pour une distribution “diffuse”.

avec une grande probabilité) alors la variance est petite (Figure 1.4 a)). Si la distribution est “diffuse” alors la variance est grande (Figure 1.4 b)).

Nous allons utiliser les propriétés des variables aléatoires à travers nos études, spécialement dans la section d'évaluation de la performance du système. Étant donné les informations de base sur les variables aléatoires que nous avons présentées dans cette section, nous allons introduire dans la section suivante, la notion d'un *processus stochastique*.

1.3.2 Processus stochastique

Définition 1.3.5. [Trivedi, 2001] *Un processus stochastique (ou un processus aléatoire) est une famille des variables aléatoires $\{X(t)|t \in T\}$ définie sur un espace de probabilité donné, indexé par le paramètre t (le temps) qui varie dans un ensemble des indices T .*

Les valeurs de la variable continue $X(t)$ s'appellent les *états* et l'ensemble de toutes les valeurs possibles représente l'*espace d'état* d'un processus, noté I . Comme la variable aléatoire est définie sur l'ensemble des sorties d'un système (S), la famille des variables aléatoires est une famille de fonctions de type $\{X(t, s)|t \in T, s \in S\}$ que nous appelons l'*état global* du système. Quand nous utilisons donc la notion d'état global du système, nous allons faire référence à la paire : variable continue et l'état caractérisé par cette variable. Pour un temps fixé $t = t_1$, nous obtenons la variable aléatoire $X_{t_1}(s) = X(t_1, s)$ (ou tout simplement $X(t_1)$), avec une variation de s dans l'ensemble S . Pour s fixé, nous obtenons $X_{s_1}(t) = X(t, s_1)$ qui est appelé la *réalisation* du processus.

Si l'ensemble des indices T est discret alors nous parlons d'un *processus en temps discret*; sinon le processus est dit *en temps continu*. Un processus en temps discret porte aussi le nom de *séquence stochastique* et est noté : $\{X_n|n \in T\}$ [Trivedi, 2001].

Si nous fixons une valeur x_1 , alors nous pouvons écrire la fonction de densité de probabilité $X(t_1)$ comme :

$$F(x_1; t_1) = F_{X(t_1)}(x_1) = P[X(t_1) \leq x_1].$$

où $F(x_1; t_1)$ est la distribution du premier ordre du processus $\{X(t)|t \geq 0\}$. Pour deux instants de temps, t_1 et t_2 , $X(t_1)$ et $X(t_2)$ sont deux variables aléatoires sur le même espace de probabilité. Leur distribution jointe est connue comme la *distribution de deuxième ordre* du processus [Trivedi, 2001] :

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2].$$

En général nous définissons la distribution d'ordre n d'un processus stochastique $\{X(t), t \in T\}$ comme :

$$F(\vec{x}; \vec{t}) = P[X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n]. \quad (1.3.3)$$

pour tout $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{t} = (t_1, \dots, t_n) \in T^n$, de sorte que $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. La définition que nous avons donné est complexe, donc pour pouvoir utiliser la distribution de $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k)$ plus d'informations sont nécessaires. Le processus stochastique qui nous intéresse est le **Processus de Markov**.

1.3.3 Processus de Markov

Définition 1.3.6. [Trivedi, 2001] *Un processus stochastique $\{X(t)|t \in T\}$ est un processus de Markov si pour tout $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t$ la distribution conditionnelle de $X(t)$ pour certaines valeurs de $X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n)$ dépend seulement de $X(t_n)$:*

$$P[X(t) \leq x | X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_0) = x_0] = P[X(t) \leq x | X(t_n) = x_n] \quad (1.3.4)$$

Dans la plupart des cas cette fonction de distribution a la propriété d'invariance par rapport à t_n :

$$P[X(t) \leq x | X(t_n) = x_n] = P[X(t - t_n) \leq x | X(0) = x_n].$$

Dans ce cas, le processus de Markov est dit **homogène** et il est caractérisé par le fait que l'histoire du processus est comprise dans l'état courant (*la propriété sans mémoire*). Dans la section suivante nous allons spécifier les chaînes des Markov que nous allons utiliser dans notre travail.

1.4 Chaînes de Markov

Dans les systèmes dynamiques réels nous ne pouvons pas prédire les événements qui vont se produire, donc l'état actuel du système va déterminer son évolution ultérieure. Les chaînes de Markov en temps continu ont été utilisées depuis longtemps dans la modélisation des systèmes dynamiques avec des espaces d'état discrets (les mathématiques financières, la gestion de stock, la conception des systèmes informatiques, les réseaux de communication, etc.). Récemment, un grand intérêt est accordé aux systèmes ayant une partie continue et une partie discrète qui peuvent interagir et s'influencer mutuellement comme par exemple : les processus de diffusion avec des paramètres de commutation Markoviens [Mariton, 1990], les processus de Markov déterministes par morceaux ([Davis, 1985], [Davis, 1993], [Jacod & Skorokhod, 1996]), les diffusions de commutation contrôlées [Bensoussan & Menaldi, 2000], [Ghosh et al., 1997].

Dans cette section nous allons présenter les chaînes de Markov en temps continu et les chaînes de Markov avec des taux de variation que nous utilisons dans notre travail.

1.4.1 Chaînes de Markov en Temps Continu (CMTC)

En général, un processus de Markov à temps discret est une séquence $X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ des variables aléatoires à valeurs dans un *espace d'états discret* et dénombrable S . La valeur de X_{t_n} est l'état du processus à l'instant t_n . Par contre, dans le cadre de nos études nous utilisons les *chaînes de Markov en temps continu*, qui sont caractérisées par des transitions qui peuvent se produire à des instants de temps arbitraires et réels, et non entiers comme c'est le cas des chaînes à temps discret. En conséquence, nous utilisons un sous-ensemble des réels non-négatifs \mathbb{R}_0^+ pour l'ensemble des indices T d'une chaîne de Markov en temps continu.

Pour définir les chaînes de Markov en temps continu, nous retournons à la définition générale d'un processus de Markov (1.3.4) qui résume l'histoire de la chaîne : à partir de l'état actuel, le futur est indépendant du passé (*propriété Markov sans mémoire*).

Définition 1.4.1. [Bolch, 2006] *Un processus stochastique $\{X_t | t \in T\}$ est une chaîne de Markov en temps continu si pour un $t_i \in \mathbb{R}_0^+$ avec $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall s_i \in S = \mathbb{N}_0$:*

$$P(X_{t_{n+1}} = s_{n+1} | X_{t_n} = s_n, X_{t_{n-1}} = s_{n-1}, \dots, X_{t_0} = s_0) = P(X_{t_{n+1}} = s_{n+1} | X_{t_n} = s_n) \quad (1.4.1)$$

Nous allons dénommer la partie droite de l'équation (1.4.1) la *probabilité de transition* $p_{ij}(u, v)$ des CMTC entre l'état i et l'état j dans l'intervalle de temps $[u, v]$ avec $u, v \in T$ et $u \leq v$:

$$p_{ij}(u, v) = P(X_v = j | X_u = i) \quad (1.4.2)$$

Pour $u = v$ nous définissons :

$$p_{ij}(u, u) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.4.3)$$

La chaîne de Markov en temps continu $\{X_t : t \in T\}$ est **homogène** (ou ayant des **probabilités de transition stationnaires**) si les probabilités de transition $p_{ij}(u, v)$ dépendent seulement de la différence de temps $t = v - u$, et non des valeurs exactes de u et v :

$$p_{ij}(t) = p_{ij}(0, t) = P(X_{u+t} = j | X_u = i) = P(X_t = j | X_0 = i), \quad \forall y \in T. \quad (1.4.4)$$

Si la chaîne est homogène, alors les temps de séjour dans une chaîne de Markov sont distribués exponentiellement, car la distribution exponentielle est la seule distribution en temps continu qui assure la propriété de Markov sans mémoire.

Nous allons noter $\mathbf{P}(u, v) = [p_{ij}(u, v)]$ la matrice de probabilités de transition pour toute pair $i, j \in S$ et tout intervalle $[u, v]$, $u, v \in T$; le vecteur des probabilités d'état à l'instant u est : $\vec{\pi}(u) = [\pi_0(u), \pi_1(u), \pi_2(u) \dots]$ et respecte la relation suivante :

$$\vec{\pi}(v) = \vec{\pi}(u)\mathbf{P}(u, v), \forall u, v \in T \quad (u \leq v). \quad (1.4.5)$$

Pour tout $u \in T$, $\mathbf{P}(u, u) = \mathbf{I}$. Dans le cas homogène la relation (1.4.5) devient :

$$\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(0)\mathbf{P}(0, t). \quad (1.4.6)$$

Afin de pouvoir résoudre les équations de type (1.4.6), nous allons définir les *taux de transition* $q_{ij}(t) (i \neq j)$ pour la chaîne de Markov en temps continu de l'état i vers l'état j . Si nous considérons l'intervalle $[t, t + \Delta t)$ alors nous définissons :

$$q_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t, t + \Delta t)}{\Delta t}, \quad i \neq j \quad (1.4.7)$$

$$q_{ii}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(t, t + \Delta t) - 1}{\Delta t} \quad (1.4.8)$$

Si les limites existent, alors, à partir des équations (1.4.7) et (1.4.8) et du fait que $\sum_{j \in S} p_{ij}(t, t + \Delta t) = 1$ à tout moment t , nous obtenons :

$$\sum_{j \in S} q_{ij}(t) = 0, \forall i \in S. \quad (1.4.9)$$

Le terme $-q_{ii}(t)$ représente le taux total pour sortir de l'état i et partir vers tout autre état, tandis que $-q_{ij}(t)$ est le taux pour sortir de l'état i et aller vers un état

précis j au moment t . Avec ces paramètres, nous allons définir la *matrice générateur infinitésimal* \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q}(t) = [q_{ij}(t)], \quad i, j \in S \quad (1.4.10)$$

où les éléments de la diagonale sont définis comme : $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$. Avec la matrice des probabilités sur l'intervalle $[v, t]$: $\mathbf{P}(v, t)$ elle vérifie des équations *Chapman-Kolmogorov en avant*, respectivement *en arrière* :

$$\frac{\partial \mathbf{P}(v, t)}{\partial t} = \mathbf{P}(v, t) \mathbf{Q}(t) \quad (1.4.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}(v, t)}{\partial v} = \mathbf{Q}(v) \mathbf{P}(v, t) \quad (1.4.12)$$

De plus, dans le cas homogène, la matrice $\mathbf{Q}(t)$ et le vecteur des probabilités $\vec{\pi}(t)$ vérifient l'équation suivante :

$$\dot{\vec{\pi}}(t) = \frac{d\vec{\pi}(t)}{dt} = \vec{\pi}(t) \mathbf{Q}(t), \quad \vec{\pi}(0) = \vec{\pi}_0. \quad (1.4.13)$$

Un intérêt particulier dans les chaînes de Markov en temps continu est le calcul du *vecteur de probabilité en régime stationnaire* qui a les propriétés suivantes pour tout $i \in S$:

1. Il est indépendant du temps t et donc $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\vec{\pi}(t)}{dt} = 0$.
2. Il est indépendant de la valeur initiale $\vec{\pi}(0)$.
3. Chaque composante $\pi_i \geq 0$.
4. π_i dépend des probabilités d'état $\pi_i(t)$ ou des probabilités de transition $p_{ji}(t)$:

$$\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ji}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_i(t).$$

En utilisant la propriété 1, l'équation (1.4.13) prend une forme plus simple :

$$\vec{\pi} \mathbf{Q} = 0 \quad (1.4.14)$$

avec la condition suivante :

$$\sum_{i \in S} \pi_i = 1. \quad (1.4.15)$$

Dans cette sous-section nous avons rappelé les propriétés fondamentales des chaînes de Markov en temps continu qui vont nous aider à définir la classe des chaînes de Markov que nous avons utilisée.

1.4.2 Chaînes de Markov avec des Taux de Variation (CMTV)

Dans la plupart des environnements, les systèmes doivent continuer à fonctionner, même si certaines composantes sont défaillantes, et assurer certains niveaux de performance, de fiabilité et la réparation en ligne des sous-systèmes défaillants. Deux aspects importants des systèmes modélisés par les chaînes de Markov nous intéressent : le changement d'état dans un intervalle $(0, t)$ et le niveau de performance. Nous allons donc associer à chaque état de la chaîne de Markov un **taux de variation** qui va représenter le niveau de performance du système dans cet état spécifique.

Diverses applications donnent naissance à plusieurs interprétations des CMTC et des taux de variation associées aux états. Si nous allons interpréter le taux de variation comme la vitesse de traitement et les transitions des CMTC comme les pannes des composants, alors la durée d'accumulation d'un taux de variation sera le temps d'exécution d'une tâche, dans un environnement soumis aux défaillances. Avec la distribution du temps d'exécution, nous pouvons dériver la probabilité de réaliser une tâche avant un certain délai.

L'utilité générale des chaînes de Markov avec des taux de variation vient de leur capacité à modéliser une large gamme de systèmes. Aussi, des mesures de performance peuvent s'obtenir facilement de manière cumulative (le montant total du travail effectué par le système dans une période de temps) ou à un certain instant de temps. En plus des équations de probabilité stationnaires (1.4.13) - (1.4.15), nous allons définir des mesures *cumulatives*, comme l'*espérance du temps total* que le système passe dans un état i dans l'intervalle $[0, t)$ [Bolch, 2006] :

$$\vec{L}(t) = \int_0^t \vec{\pi}(u) du, \quad (1.4.16)$$

Une méthode plus efficace numériquement pour calculer les *probabilités cumulatives* est de résoudre, par exemple, les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d\vec{L}(t)}{dt} = \vec{L}(t)\mathbf{Q} + \vec{\pi}(0), \quad \vec{L}(0) = \vec{0}. \quad (1.4.17)$$

Les taux de variation sont définis selon les exigences du système, la disponibilité ou la fiabilité du système, etc. Soit r_i le taux de variation associé à l'état $i \in S$. Alors un taux $r_i \tau_i$ est accumulé pendant un temps de séjour τ_i dans un état i . Soit $\{Z(t), t \geq 0\}$ une chaîne de Markov en temps continu avec un espace d'état S de cardinalité N , alors la variable aléatoire :

$$X(t) = r_{Z(t)} = r_i \quad \text{si} \quad Z(t) = i. \quad (1.4.18)$$

dénote le **taux instantané de variation** de la chaîne de Markov au moment t . Cette

variable nous permet de définir le **taux de variation accumulé** $Y(t)$ sur l'intervalle $[0, t)$ comme :

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau = \int_0^t r_{Z(\tau)} d\tau. \quad (1.4.19)$$

Nous allons considérer par exemple une chaîne de Markov à trois états (Figure 1.5), caractérisée par la matrice de transition \mathbf{Q} et le vecteur des taux de variation $\vec{r} = (3, 1, 0)$ associés à chaque état 0, 1 et 2. Si nous considérons le vecteur de probabilité initiale $\vec{\pi}_0 = (1, 0, 0)$ (donc le processus démarre dans l'état 0 : $Z(0) = 0$) alors nous obtenons les réalisations pour $Z(t)$, $X(t)$ et $Y(t)$ représentées dans la Figure 1.5.

Comme le temps de séjour dans l'état 1 est donné par t_1 , le taux de variation accumulé dans cette période est $y_1 = 3t_1$. Après la transition vers l'état 1, un taux de variation additionnel $y_2 - y_1 = 1(t_2 - t_1)$ est accumulé, etc. Si nous allons suivre la Figure 1.5, nous allons observer que $X(t)$ et $Y(t)$ suivent l'évolution de $Z(t)$ à travers le vecteur \vec{r} . Si $X(t)$ et $Z(t)$ prennent des valeurs discrètes, nous observons en revanche que $Y(t)$ est une fonction continue, monotone et non décroissante. Des mesures supplémentaires peuvent se calculer pour $Y(t)$ comme par exemple la *performabilité* :

$$\psi(y, t) = P[Y(t) \leq y] \quad (1.4.20)$$

où $\psi(y, t)$ est la *distribution du taux de variation accumulé* dans l'intervalle $[0, t)$. Malheureusement cette mesure de performance est difficile à calculer pour des modèles généraux ; cette difficulté apparaît aussi pour le *taux de variation accumulé* dans le temps :

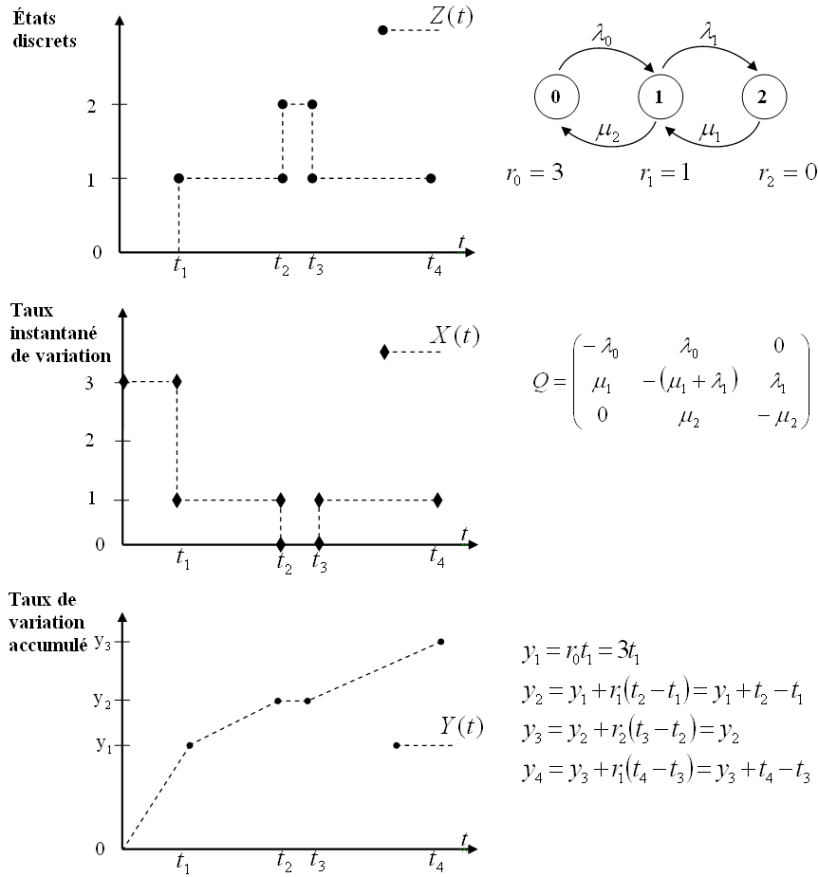
$$\Phi(y, t) = P\left[\frac{1}{t}Y(t) \leq y\right] \quad (1.4.21)$$

Le problème pourrait être simplifié si les exigences du système étaient limitées à des espérances ou à des moments de variables aléatoires, plutôt qu'à des fonctions de distribution des taux de variation accumulés. Nous allons donc introduire la notion d'**espérance stationnaire du taux instantané de variation**, à partir de la solution de l'équation (1.4.13) :

$$E[X(t)] = \sum_{i \in S} r_i \pi_i(t). \quad (1.4.22)$$

De la même façon, pour calculer l'**espérance du taux de variation accumulé** à partir de l'équation (1.4.17), nous obtenons :

$$E[Y(t)] = \sum_{i \in S} r_i L_i(t). \quad (1.4.23)$$


 FIGURE 1.5 – Modèle de CMTV à trois états avec les réalisations de $Z(t)$, $X(t)$ et $Y(t)$

Avec ces formules, nous pouvons obtenir des moments de performance d'ordre plus grand, comme par exemple la *variance* du taux de variation :

$$\text{var}[Z(t)] = \sum_{i \in S} r_i^2 \pi_i(t) - \left(\sum_{i \in S} r_i \pi_i(t) \right)^2. \quad (1.4.24)$$

Les chaînes de Markov avec des taux de variation associés aux états nous donnent la possibilité de réaliser une analyse de performance sur les mesures du système. Plusieurs études ont été réalisées en commençant avec l'introduction de la notion de *performabilité* par [Meyer, 1989], en continuant avec l'analyse transitoire des CMTV ([Reibman & Trivedi, 1989], [Iyer et al., 1986], [Trivedi et al., 1994]), et les études sur les moments de performabilité [Rácz & Telek, 1999], etc.

Nous allons faire référence aux études de performabilité réalisées par [Viswanadham et al., 1995] que nous avons utilisés dans une partie de nos travaux. En [Viswanadham et al., 1995] les chaînes de Markov récompensées ont été utilisées pour l'analyse transitoire des systèmes de production soumises aux pannes, qui produisent plusieurs types de

pièces. Leur contribution concerne aussi les méthodes numériques pour le calcul des moments de performance pour chaque type de pièce, que nous allons présenter dans la suite.

Soit $\{Z(u), u \geq 0\}$ la chaîne de Markov, S l'espace d'état et r_i le taux de variation d'un état $i \in S$. Alors le processus de Markov complet est défini par :

Définition 1.4.2. *Le processus composite $\{Z(u), Y(u), u \geq 0\}$ est un processus Markov si :*

$$\begin{aligned} Pr\{Y(t) \leq Y_t | Z(s) = i, Y(s) = y_s, [Z(u), Y(u), u \in [0, s]]\} \\ = Pr\{Y(t) \leq y_t | Z(s) = i, Y(s) = y_s\} \\ = Pr\{Y(t) - Y(s) \leq y_t - y_s | Z(s) = i\} \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

En plus, le processus Markov $\{Z(u), Y(u), u \geq 0\}$ est homogène si $\{Z(u), u \geq 0\}$ est homogène et les taux $r_{Z(u)}$ sont invariants dans le temps. L'évolution de ce processus est complètement décrite par le vecteur colonne $\vec{F}(y, t)$ de dimension $N \times 1$:

$$F_i(y, t) = Pr\{Y(t) \leq y | Z(0) = i\}. \quad (1.4.26)$$

appelée la **fonction de distribution cumulative** de $\{Y(t) \leq Y\}$, en sachant que le système démarre dans un état i . Cette fonction de distribution qui a un nombre fini des discontinuités et qui est différentiable, vérifie les équations hyperboliques aux dérivées partielles suivantes :

Théorème 1.4.1. *Le vecteur de distribution $\vec{F}(y, t)$ [Viswanadham et al., 1995] satisfait le système d'équations linéaires aux dérivées partielles hyperboliques :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{F}^T(y, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial \vec{F}^T(y, t)}{\partial y} \mathbf{R} + \vec{F}^T(y, t) \mathbf{Q} \\ \vec{F}(0, t) &= \vec{0}, \quad t \geq 0 \\ \vec{F}(y, 0) &= \vec{U}(y) \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

où \mathbf{R} est une matrice diagonale avec les éléments $\{r_1, r_2, \dots, r_N\}$ et $\vec{U}(x) = 1$ si $x \geq 0$ et 0 autrement.

Théorème 1.4.2. *Le vecteur de distribution $\vec{F}(y, t)$ satisfait le système d'équations linéaires aux dérivées partielles adjoint :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{F}(y, t)}{\partial t} &= \mathbf{R} \frac{\partial \vec{F}(y, t)}{\partial y} + \mathbf{Q}^T \vec{F}(y, t) \\ \vec{F}(0, t) &= \vec{0}, \quad t \geq 0 \\ \vec{F}(y, 0) &= \vec{U}(y) \end{aligned} \quad (1.4.28)$$

L'objectif est de calculer les moments de performabilité qui sont importants pour les études de performance du système. Soit $m_n(t)$ le vecteur colonne d'ordre n défini comme :

$$m_{n,i}(t) = E[Y^n(t)|Z(0) = i]; \quad i = \{1, \dots, N\} \quad (1.4.29)$$

$$\vec{m}_n(t) = [m_{n,1}, \dots, m_{n,N}] \quad (1.4.30)$$

avec $\vec{m}_0(t) = \vec{e}$, $\vec{m}_n(0) = \vec{0}$. Ensuite l'espérance du moment d'ordre n devient :

$$E[(Y(t))^n] = \vec{p}(0)\vec{m}_n(t) \quad (1.4.31)$$

où $\vec{p}(0)$ est le vecteur de probabilité initiale. De leur côté, les moments de performabilité vérifient l'équation suivante :

Théorème 1.4.3. *Le vecteur des moments $\vec{m}_n(t)$, $n \geq 1$, évolue suivant les équations :*

$$\frac{d\vec{m}_n(t)}{dt} = \mathbf{Q}\vec{m}_n(t) + n\mathbf{R}\vec{m}_{n-1}(t); \quad \vec{m}_0(t) = \vec{e} \quad (1.4.32)$$

Toutes ces méthodes et mesures de distribution de probabilité vont nous aider à compléter l'analyse probabiliste que nous avons menée sur notre système et aussi à valider notre méthode par une simulation à temps continu pour les systèmes stochastiques à commutations que nous allons présenter dans le Chapitre 3.

1.5 Systèmes stochastiques à commutation (SSC)

Cette section est dédiée à l'introduction des systèmes stochastiques à commutation (SSC). Une première partie sera dédiée à la présentation des systèmes hybrides, suivie par les caractéristiques et les propriétés des SSC.

1.5.1 Systèmes hybrides

Introduction

Généralement les études des systèmes dynamiques comme la modélisation, la commande et l'analyse, se concentrent sur des processus *dynamiques continus* associés normalement à des équations différentielles. L'analyse de performance pour ces systèmes est réalisée par exemple pour les systèmes de communication, les systèmes manufacturiers ou les systèmes qui effectuent des transitions d'un état discret à un autre.

Beaucoup de systèmes réels allant des machines à laver aux installations des procédés chimiques sont composés de sous-processus continus qui sont gérés par une commande discrète qui redémarre ou arrête les systèmes, en suivant une horloge ou des signaux de capteurs installés sur les processus continus.

D'un point de vue général, un *système hybride* est vu comme un système dont la dynamique continue et discrète interagissent et leur interaction détermine le comportement qualitatif et quantitatif du système. En conséquence, des modèles spécifiques doivent être développés prenant en compte cet aspect hybride. Une représentation graphique de l'interaction entre les deux parties (continue et discrète) est montrée dans la Figure 1.6.

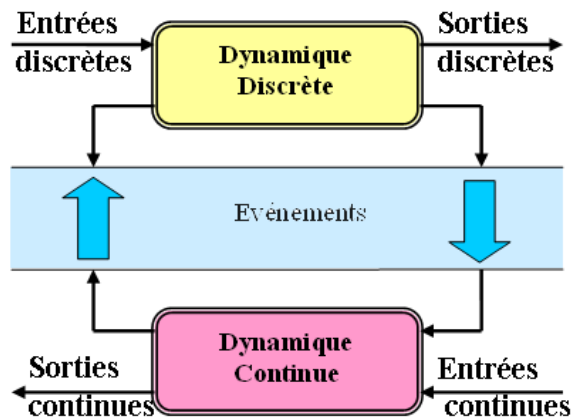


FIGURE 1.6 – Systèmes hybrides. L'interaction de la dynamique discrète et continue à travers des événements et des commutations entre divers états de fonctionnement.

Les méthodes et les outils développés pour les systèmes hybrides se sont révélés utiles dans les protocoles de communication [Hespanha, 2005], le contrôle du trafic aérien [Pola et al., 2003]-[Tomlin et al., 1998], le contrôle d'automobiles [Balluchi et al., 2000], la bio ingénierie [Amonlirdviman et al., 2005], les systèmes d'autoroute [Varaiya, 1993], etc. Nous allons donner un exemple de système hybride afin de comprendre l'interaction de la dynamique continue et discrète.

Exemple 1.5.1

[Cassandras & Lafortune, 1999] Un exemple concret de système hybride est représenté dans la Figure 1.7 où des conteneurs vides sont remplis automatiquement jusqu'à un niveau maximal avec une matière fluide fournie par le point d'entrée du flux. Les conteneurs attendent dans un stock que la station de remplissage soit libre. Quand c'est le cas, le commutateur v_1 est activé et un conteneur est ramené dans la position de remplissage. La durée de cette opération est mémorisée par le "processus d'installation" avant le

remplissage. Si un nouveau conteneur est prêt à être rempli, un signal est envoyé vers le commutateur v_2 pour initier l'écoulement du fluide. Le processus de remplissage des conteneurs se fait en suivant une dynamique continue.

Le commutateur de la commande d'écoulement v_3 est chargé de la sélection entre : a) un "taux de remplissage" souhaité tant que le conteneur n'est pas plein et le niveau de la matière fluide dans le réservoir est positif, b) un "taux d'entrée" qui correspond à l'entrée du flux si le réservoir est vide, et c) zéro quand le conteneur est plein ou quand il n'y a pas de conteneurs à remplir. Le système a aussi deux capteurs pour détecter (a) quand un conteneur est arrivé au niveau de remplissage souhaité, et (b) quand le réservoir qui assure l'alimentation du système avec la matière fluide est vide.

Dans cet exemple nous pouvons observer la nature hybride du système ayant une interaction soutenue et répétée entre la dynamique discrète (le remplissage des conteneurs) et la dynamique continue (la commande du flux).

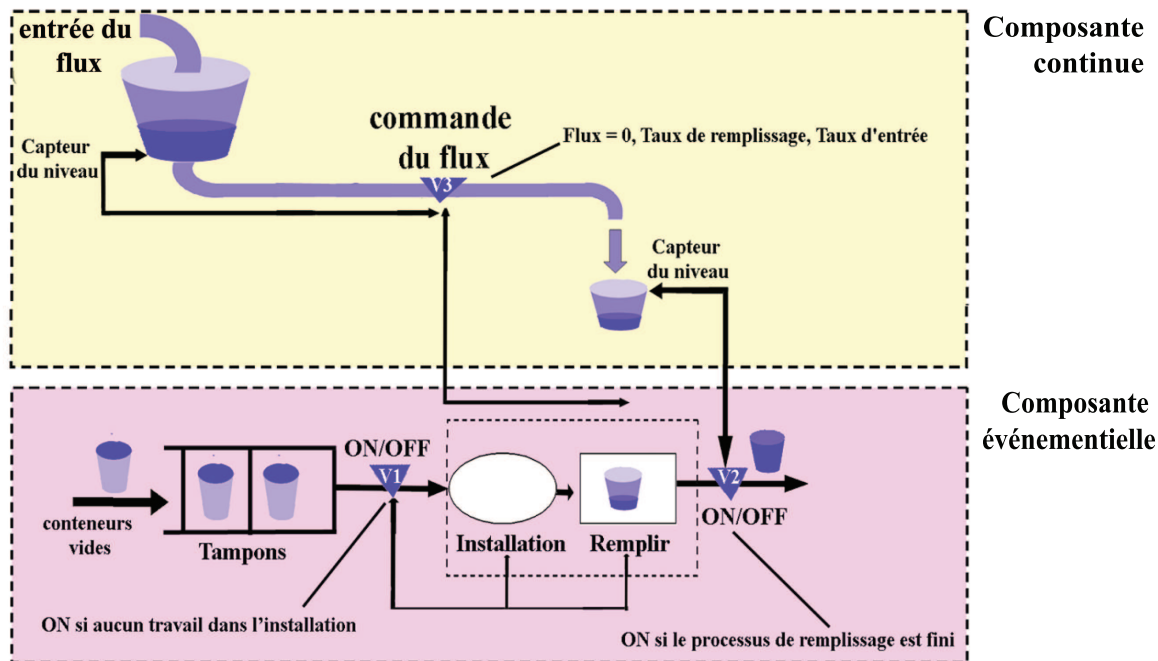


FIGURE 1.7 – Processus simple de modélisation

Définition des systèmes hybrides

D'un point de vue conceptuel, la définition de base d'un système hybride est basée sur toutes les interactions possibles entre ses variables continues et discrètes. Nous pouvons classer les approches de modélisation des systèmes hybrides selon trois classes [Chen & Provan, 1997] :

- l'*approche continue* : cette approche consiste à définir une approximation des dynamiques discrètes du système hybride par des équations différentielles pour modéliser l'occurrence des événements discrets ;
- l'*approche événementielle* : consiste à supprimer les dynamiques continues ou à faire une approximation de l'évolution continue de façon à ce que le système hybride soit représenté uniquement par les événements qui le caractérisent ;
- l'*approche mixte* : dans une approche mixte, chacune des deux composantes (discrète et continue) est représentée de façon rigoureuse et explicite et leur collaboration est prise en compte dans l'interface qui les relie. La résolution du modèle continu déclenche l'évolution des variables au cours du temps et valide certaines transitions. L'évolution du modèle discret va déterminer alors la mise en place d'un nouvel état discret qui se traduit par l'élaboration d'un nouveau système d'équations.

Nous allons définir dans la suite une approche mixte que nous utilisons qui est l'*automate hybride*. La définition de l'automate hybride va nous fournir le cadre et la terminologie nécessaires pour présenter les caractéristiques typiques aux systèmes hybrides.

Pour définir un automate hybride nous allons d'abord introduire pour un système donné la notion de *représentation d'état en temps continu* et la notion d'*automate à états finis*.

Définition 1.5.1. [Shaft & Schumacher, 2000] *La représentation d'état en temps continu est décrite par le vecteur de variables d'état $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et le vecteur des variables externes $\vec{w} \in \mathbb{R}^q$, liées par un ensemble mixte des équations différentielles et algébriques de la forme suivante :*

$$F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{w}) = 0 \tag{1.5.1}$$

où $\dot{\vec{x}}$ représente la dérivée de \vec{x} par rapport au temps.

Les solutions de (1.5.1) sont des fonctions de temps $\vec{x}(t)$, $\vec{w}(t)$ qui respectent la relation :

$$F(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), \vec{w}(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Cette définition inclut une forme plus connue d'équations qui décrivent un système entrée-sortie continu dans le temps :

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, \vec{u}) \tag{1.5.2}$$

$$\vec{y} = h(\vec{x}, \vec{u}) \tag{1.5.3}$$

où le vecteur des variables externes \vec{w} a été séparé en deux : le *vecteur des variables d'entrée* $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ et le *vecteur des variables de sortie* $\vec{y} \in \mathbb{R}^p$ (avec $m + p = q$). La seule

équation algébrique est celle qui relie les variables de sortie \vec{y} de \vec{x} et \vec{u} (1.5.3). Dans certains cas le système admet des discontinuités dans les variables d'entrée ou $\vec{x}(t)$ est différentiable par morceaux. Nous pouvons caractériser ces discontinuités, par exemple, à l'aide des automates finis.

Définition 1.5.2. [Shaft & Schumacher, 2000] *Un automate à états finis est un triplet (V, U, A) , où V est ensemble fini d'états, U est l'alphabet fini des symboles, A est la fonction de transition définie sur $V \times U \times V$ et ses éléments sont des transitions. Une séquence $\{v_0, u_0, v_1, u_1, \dots, v_{n-1}, u_{n-1}, v_n\}$ avec $(v_i, u_i, v_{i+1}) \in A$ pour $i = 1, 2, \dots, n - 1$, représente une trajectoire.*

Une manière de représenter un automate fini est à travers un graphe dont les sommets correspondent aux éléments de V et les arcs aux éléments de A comme représenté dans la Figure 1.8. Les étiquettes de chaque arc sont les éléments de l'ensemble U . Souvent la définition d'un automate à états finis contient aussi une indication explicite d'un ensemble d'états initiaux $I \subset V$ et un ensemble d'états finaux $F \subset V$. Une chemin $(v_0, u_0, v_1, u_1, \dots, v_{n-1}, u_{n-1}, v_n)$ est alors valide si $v_0 \in I$ et $v_n \in F$.

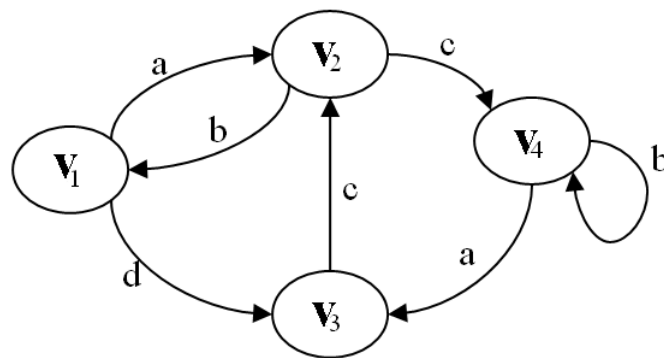


FIGURE 1.8 – Automate à états finis

Par rapport aux systèmes continus définis par l'équation (1.5.2), les automates à états finis sont définis par tous les chemins valides de l'automate. Nous pouvons faire un parallèle avec la Définition (1.5.1) en considérant l'espace d'état V analogue à l'espace X , l'alphabet des symboles U analogue à W et la règle de transition A analogue à l'ensemble des équations différentielles - algébriques.

Automates hybrides

Les automates hybrides [Alur et al., 1995] sont une extension des automates à états finis. Ils représentent des systèmes qui intègrent deux composantes : celle ayant un comportement discret, modélisée naturellement par un automate à états finis et celle dont

le comportement varie de manière continue dans le temps, modélisée par un système algébro-différentiel. Un automate hybride évolue par une alternance de pas continus (où les variables d'état et le temps évoluent de façon continue) et de pas discrets où des transitions discrètes et instantanées sont franchies.

D'un point de vue informel et général, un automate hybride apparaît ainsi comme un automate à états finis pilotant un ensemble d'équations différentielles modélisant la dynamique continue du système. L'état de l'automate change instantanément lors de l'occurrence d'un événement discret ou par l'écoulement du temps lors de la validation d'une condition logique spécifiée sur la valeur de la variable continue [Henzinger, 1996].

Si nous combinons les deux définitions 1.5.1 et 1.5.2 alors nous obtenons la définition d'un automate hybride qui est parfois indispensable pour la modélisation des systèmes hybrides.

Définition 1.5.3. [Alur et al., 1995] *Un automate hybride est un 7-uplet :*

$$A_H = \langle X, S, \psi, Inv, A, C, Af \rangle$$

tel que :

- X est un ensemble fini de variables x_i . On note x le vecteur composé des valeurs de variables à un instant donné, appelé état des variables. L'ensemble d'états des variables est noté V .
- S est un ensemble fini de sommets.
- ψ est une fonction qui associe à chaque sommet $s \in S$ une fonction ψ_s décrivant l'évolution des variables en fonction de temps. En général ψ peut être définie comme :

$$\psi_s : \dot{x}(t) = f(x, t)$$

où f est une fonction quelconque.

- Inv est une fonction qui associe à chaque sommet $s \in S$ un prédicat sur les variables, appelé l'invariant du sommet s .
- A est un ensemble fini de transitions. Chaque transition $a = (s, s')$ identifie un sommet de départ $s \in S$ et un sommet d'arrivée $s' \in S$.
- C est une fonction qui associe à chaque transition $a = (s, s')$ un prédicat C_a appelé condition. Une transition $a = (s, s')$ ne peut être exécutée que si la condition C_a est vérifiée.
- Af est une fonction qui associe à chaque transition $a = (s, s')$ une relation Af_a appelée affectation. Elle est utilisée pour la mise à jour des états des variables après l'exécution de la transition a . Elle est généralement exprimée comme :

$$Af_a : x := g(x)$$

Avant de donner un exemple d'automate hybride nous expliquons de manière informelle son comportement :

- Si g est un prédicat alors nous notons par $\|g\|$ l'ensemble des états des variables qui satisfont le prédicat g , c'est-à-dire $\|g\| = \{x/g(x) \text{ est vrai}\}$.
- Un état global du système est déterminé par un sommet $s \in S$ et par un état des variables $x \in V$. Nous notons un état global comme une paire (s, x) . Nous ne considérons que les états (s, x) tels que $x \in \|Inv_s\|$.
- La transition $a = (s, s') \in A$ peut être exécutée à partir de l'état (s, x) , si la condition C_a est vérifiée, c'est-à-dire $x \in \|C_a\|$. L'état résultant (s, x') correspond à $x' = Af_a(x)$.
- Les transitions entre les états sont instantanées.
- Les valeurs des variables dans les sommets changent avec le passage du temps et en respectant la fonction d'évolution.
- Tant que l'invariant du sommet est satisfait, le système va séjourner dans ce sommet.

Exemple 1.5.2

[Henzinger, 1996] Soit l'automate hybride représenté dans la Figure 1.9 qui est un thermostat. La variable x représente la température. Dans ce modèle, l'évolution continue est représentée par des équations différentielles associées aux sommets du graphe et l'évolution événementielle est modélisée par les arcs étiquetés du graphe. Les sommets *Éteint* et *Allumé* représentent les états discrets du système où l'évolution continue se produit. Les prédicats $x > 21$ et $x < 19$ sur les arcs traduisent les conditions, dites aussi les *gardes*, pour l'occurrence des événements *allumer* et *éteindre*, respectivement. Les prédicats $x \geq 18$ et $x \leq 22$ dans les sommets représentent les invariants de l'automate, c'est-à-dire, des conditions imposées aux variables continues du système pour rester dans un état discret. L'état initial du système est représenté par un arc d'entrée dans le sommet d'origine avec une température initiale de $x = 20$ degrés. La variable x évolue dans les sommets *Éteint*, respectivement *Allumé* conformément aux équations différentielles $\dot{x} = -0.1x$, respectivement $\dot{x} = 5 - 0.1x$, appelées les conditions de flux¹.

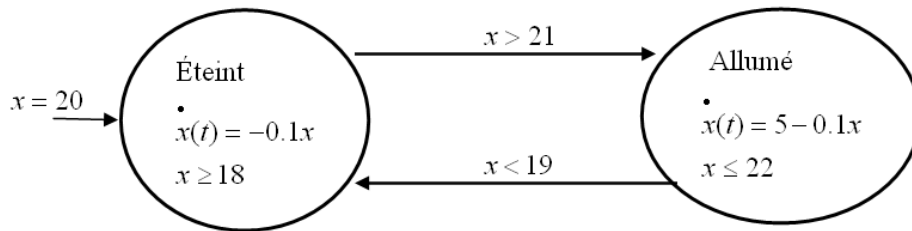


FIGURE 1.9 – Automate hybride

1. Nous désignons par \dot{x} la dérivée du premier ordre par rapport au temps de la variable x .

1.5.2 Systèmes hybrides stochastiques

La plupart des études dans le domaine des systèmes hybrides sont faites sur les modèles déterministes qui prévoient le comportement du système dans le futur sans considérer les incertitudes. Dans la pratique, beaucoup de systèmes dynamiques fonctionnent sous l'influence des événements aléatoires qui peuvent changer complètement le fonctionnement du système. L'idée d'introduire l'aspect stochastique dans les systèmes hybrides n'est pas nouvelle, des nouveaux modèles et approches sont fournis en [Lygeros, 1999], [Altman & Gaitsgory, 1997], [Basak et al., 1996]. La différence entre les approches est dans quelle partie du modèle l'aspect stochastique intervient.

Une première possibilité est de remplacer les sauts déterministes entre les états discrets du système par des sauts aléatoires qui respectent une loi probabiliste. Donc l'évolution de l'état discret sera en effet une chaîne de Markov à temps continu homogène. Il reste alors à savoir à quel moment un saut se produit ? En [Altman & Gaitsgory, 1997] les sauts se produisent à chaque instant de temps ε ; par contre en [Tsai, 1998] les transitions suivent une chaîne de Markov en temps continu. Dans les deux cas les transitions aléatoires sont supposées indépendantes de la dynamique continue, par conséquent les modèles sont plutôt vus comme une extension d'un processus de Markov avec des états continus attachés qui suivent des équations différentielles déterministes.

Une deuxième possibilité est de remplacer la dynamique déterministe de l'ensemble d'états par des équations différentielles stochastiques. Ainsi, même si les transitions restent discrètes et déterministes, à partir d'un état initial fixé, différentes gardes peuvent s'activer en fonction de la solution du processus stochastique, donc des différentes transitions discrètes se produisent aléatoirement. Nous allons définir de manière générale les systèmes hybrides stochastiques dans la suite.

Définition 1.5.4. *Un automate stochastique hybride* [Perez-Castaneda et al., 2009] est un 11-tuple dans lequel :

$$A_{SH} = \langle X, S, E, \psi, Inv, A, C, R, Af, p, x_0, p_0, T_s \rangle$$

tel que :

- X est un ensemble fini des variables x_i (V est l'ensemble des états des variables),
- S est un ensemble fini de sommets,
- E est un ensemble fini d'événements,
- ψ est une fonction qui associe à chaque sommet $s \in S$ une fonction ψ_s décrivant l'évolution des variables en fonction de temps. En général ψ peut être définie comme :

$$\psi_s : \dot{x}(t) = f(x, t)$$

où f est une fonction quelconque,

- *Inv* est une fonction qui associe à chaque sommet $s \in S$ un prédicat sur les variables, appelé l'invariant du sommet s ,
- *A* est un ensemble fini de transitions. Chaque transition $a = (s, s')$ identifie un sommet de départ $s \in S$ et un sommet d'arrivée $s' \in S$, avec un événement e associé à l'arc,
- *C* est une fonction qui associe à chaque transition $a = (s, s')$ un prédicat C_a appelé condition. Une transition $a = (s, s')$ ne peut être exécutée que si la condition C_a est vérifiée.
- *R* est une fonction de réinitialisation. Si la transition de l'état s à l'état s' se réalise alors *R* définit les valeurs initiales des variables continues du système,
- *Af* est l'affectation qui associe à chaque transition $a = (s, s')$ une relation Af_a ; elle est généralement exprimée comme :

$$Af_a : x := g(x)$$

- *p* est une distribution de probabilités de transition d'état $p(s'|s, e)$. Par exemple si on a le même événement e définissant les transitions du sommet s vers s' et s'' , on peut définir la probabilité q de passer de s à s' et la probabilité $(1 - q)$ de passer de s à s'' .
- x_0 et p_0 correspondent à la valeur initiale du vecteur d'état continu, respectivement à la distribution initiale des probabilités de transition.
- T_s , $s \in S$ correspond au temps de séjour aléatoire caractéristique à chaque état.

Les éléments S et E de l'automate stochastique hybride correspondent à l'automate à états finis définissant sa partie événementielle. En revanche, X et Af définissent sa partie continue. Finalement p exprime son aspect stochastique. Une représentation graphique générale d'un automate stochastique hybride est donnée dans la Figure 1.10 où les transitions de probabilités entre les états sont notées p_j avec $j \in \{1, 2, 3\}$ et les fonctions de réinitialisation par $x(t) \rightarrow R_j(x, t)$.

Le caractère aléatoire peut intervenir dans une ou dans plusieurs composantes continues du système donc des équations stochastiques différentielles sont nécessaires pour modéliser le comportement du système. Dans ce cas, si une commutation entre les états de fonctionnement du système est causée par une variable continue qui arrive à une certaine limite alors la manière aléatoire dont cette variable évolue dans le temps va affecter les événements de commutation associés.

1.5.3 Systèmes stochastiques à commutation

Les systèmes stochastiques à commutation représentent une classe de systèmes hybrides qui changent entre plusieurs états globaux de fonctionnement à cause de divers

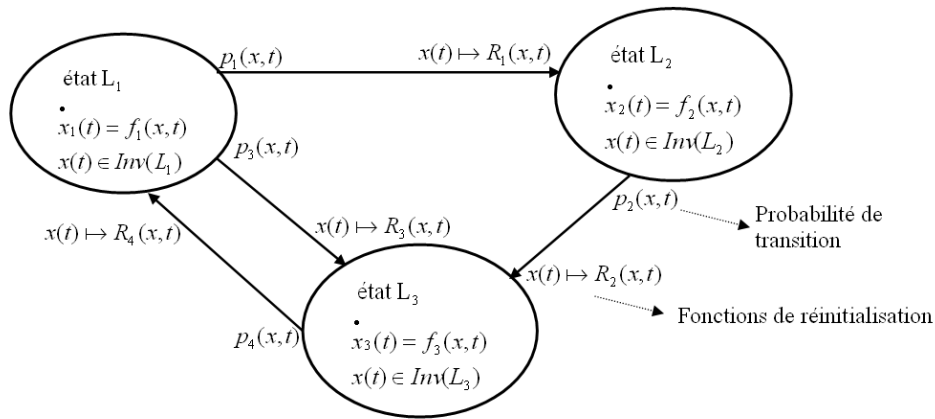


FIGURE 1.10 – Automate stochastique hybride

facteurs. En général, un système qui commute est composé d'une famille de sous-systèmes et d'une règle (une fonction) qui gère la commutation entre ces sous-systèmes. Le domaine d'applicabilité est grand, souvent sont des systèmes affectés par des multiples changements aléatoires et des défaillances des composantes : les systèmes économiques, les systèmes de fabrication, les systèmes mécaniques, l'industrie automobile, le contrôle du trafic aérien, etc. Comme la dynamique est régie par des équations différentielles entre deux instants de temps successifs, ce type de systèmes est souvent considéré comme des systèmes stochastiques déterministes par morceaux [Davis, 1993].

Pour définir plus précisément les systèmes stochastiques à commutation, nous allons considérer une famille $\{f_p : p \in \mathcal{P}\}$ de fonctions définies sur \mathbb{R}^n avec des valeurs en \mathbb{R}^n , paramétrées par un ensemble d'indices \mathcal{P} . Soit $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}$ une fonction du temps, constante par morceaux, appelée *signal de commutation*. Nous pouvons donc définir un système stochastique à commutations par des équations différentielles de type [Liberzon, 2003] :

$$\dot{x} = f_\sigma(x) \tag{1.5.4}$$

Un signal de commutation σ a un nombre fini de discontinuités - que nous appelons *instants de commutation* sur chaque intervalle borné ; ce signal prend des valeurs constantes entre deux instants de commutation consécutifs. Le rôle de σ est de spécifier à chaque instant t l'indice $\sigma(t) \in \mathcal{P}$ du *système actif*, qui est un système de type (1.5.4). Une illustration d'un tel signal σ pour le cas $\mathcal{P} = \{0, 1, 2\}$ est représenté dans la Figure 1.11.

Un modèle complet du type (1.5.4) impliquerait la spécification d'une dynamique contenant l'évolution de x et de σ , car ils représentent la partie continue, respectivement discrète du système. Si nous ignorons les détails du comportement discret et nous consi-

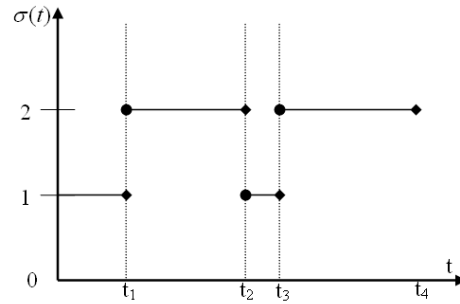


FIGURE 1.11 – Signal de commutation

dérons tous les signaux σ qui appartiennent à une certaine classe, alors nous pouvons voir les systèmes stochastiques à commutation comme des abstractions des systèmes hybrides. Une discussion plus détaillée sur la relation entre les systèmes hybrides et les systèmes stochastiques à commutation a été réalisée par [Hespanha, 2004].

Considérons l'exemple d'un système stochastique à commutation simple utilisé par [Boukas, 2004] avec la dynamique suivante :

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + bu(t), x(0) = x_0 \quad (1.5.5)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}$ est la variable d'état, $u(t) \in \mathbb{R}$ la commande, b est une constante et $a(t)$ la chaîne de Markov à temps continu avec des commutations aléatoires entre ses deux états a_1 et a_2 , et avec la matrice de transition suivante :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

avec p et q scalaires positives.

Le système considéré aura donc deux états globaux de fonctionnement avec des changements aléatoires entre ses états. En utilisant la théorie probabiliste nous pouvons déterminer les probabilités stationnaires (la proportion de temps que la chaîne de Markov va passer dans chaque état) par les relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} = 0$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

La solution de ces équations est :

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Quand le temps t évolue, l'équation du système va changer aléatoirement entre les deux dynamiques :

$$\dot{x}(t) = a_1 x(t) + bu(t),$$

$$\dot{x}(t) = a_2 x(t) + bu(t)$$

Ce type de système simple fait partie des systèmes stochastiques à commutation qui peuvent être utilisés pour modéliser plusieurs systèmes ayant des pannes ou des changements brusques de comportement. Le problème principal traité par [Boukas, 2004] est la stabilité de tels SSC en utilisant une généralisation de l'approche Lyapunov présentée par [Kushner, 1967], mais aussi des méthodes diverses pour la conception d'un contrôleur qui stabilise le système.

La partie continue du système qui prend des valeurs en \mathbb{R}^n porte le nom de variable d'état. La partie discrète prend des valeurs dans un ensemble fini et change aléatoirement entre les états. Cette partie discrète est représentée par un processus Markov en temps continu. En général, l'état du système est noté $(x(t), Z(t))$ et l'évolution du système suit les relations suivantes :

- **Commutation** Soit $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, N\}$ un ensemble indexé et $\{Z(t), t \geq 0\}$ une chaîne de Markov en temps continu prenant des valeurs en \mathcal{S} avec les probabilités stationnaires de transition suivantes :

$$P[Z(t+h) = j | Z(t) = i] = \begin{cases} \lambda_{ij}h + o(h), i \neq j \\ 1 + \lambda_{ii}h + o(h), \text{ sinon} \end{cases} \quad (1.5.6)$$

où $h > 0$; $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$; et $\lambda_{ij} \geq 0$ est le taux de probabilité de transition de l'état i à l'état j au moment t et $\lambda_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij}$.

- **L'équation d'état continu** est du type :

$$d\vec{x}(t) = A(Z(t), t)x(t)dt + B(Z(t), t)u(t)dt$$

où $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état au moment t , $\vec{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de commande au moment t et $A(Z(t), t)$, $B(Z(t), t)$ sont les matrices d'état, respectivement du contrôle.

Exemple 1.5.3

[Boukas, 2004] Un exemple pratique qui correspond au modèle présenté ci-dessus est un système de production avec des machines soumises aux pannes. Pour simplifier le problème, considérons que le système contient une seule

machine qui produit un seul type de pièce. Nous allons supposer que l'état de la machine est caractérisé par une chaîne de Markov $\{Z(t), t \geq 0\}$ à deux états $\mathcal{S} = \{0, 1\}$. $Z(t) = 0$ signifie que la machine est en panne et aucune pièce se produit. $Z(t) = 1$ signifie que la machine est opérationnelle. Le changement entre les deux états est décrit par des probabilités de transitions de type (1.5.6) :

Soit $x(t)$ le niveau de stock de production au moment t . $x(t) \geq 0$ représente un surplus et $x(t) < 0$ un déficit. Nous allons considérer que les pièces se détériorent dans le temps avec un taux constant ρ ; $u(t)$ et $d(t)$ représentent le taux de production et le taux de demande constante au moment t . La dynamique associée au niveau de stock est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\rho x(t) + b(Z(t))u(t) - d(t), & \text{si } x(t) > 0 \\ \dot{x}(t) = b(Z(t))u(t) - d(t), & \text{sinon} \end{cases}$$

avec :

$$b(Z(t)) = \begin{cases} 1, & \text{si } Z(t) = 1 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si un surplus est enregistré, le système changera entre les états de fonctionnement et des mesures de contrôle seront appliquées. Le taux de production $u(t)$ satisfait les contraintes suivantes :

$$0 \leq u(t) \leq \bar{u}$$

avec \bar{u} constante positive. Si le taux d est connu, alors nous pouvons choisir le taux de production $u(\cdot)$ de sorte que nous n'aurions pas de surplus.

Un exemple de système stochastique à commutation qui sera étudié tout au long de la thèse sera présenté à la fin de ce chapitre avec une mesure de contrôle adaptée à son comportement que nous allons présenter dans la section suivante.

1.6 Contrôle basé sur les événements (CBE)

La théorie des chaînes de Markov contrôlées peut devenir sophistiquée et élaborée amenant à formuler des problèmes complexes. Par contre, elle nous donne la possibilité de formuler le problème de contrôle et d'obtenir des solutions au moins pour des cas simples. Quand nous parlons d'un processus de Markov, nous parlons des *actions de contrôle* quand une transition s'effectue et d'un *coût* associé à chaque action.

En retournant sur la définition de base que nous avons donné pour les systèmes dynamiques en (1.2.1)-(1.2.2), le problème de contrôle devient : comment choisir l'entrée

du système afin d'obtenir un certain comportement désiré ? Ainsi l'entrée du système est souvent vue comme un *signal de contrôle* $\vec{u}(t)$ appliqué pour obtenir le comportement désiré (noté par un signal de référence $\vec{r}(t)$) qui prendra en compte aussi les événements aléatoires :

$$\vec{u}(t) = \gamma(\vec{r}(t), \vec{x}(t), t) \quad (1.6.1)$$

où $\gamma(\cdot)$ est la fonction système de type : $\gamma_1(r_1(t), x_1(t), t)$, etc.

Comme déjà présenté dans les sections précédentes, l'objectif de nos études sont les systèmes dynamiques avec une évolution aléatoire en fonction des événements externes. Appliquer le contrôle pour les systèmes stochastiques à commutation nécessite une méthode spéciale, adaptée au caractère aléatoire du système.

Nous considérons le ***contrôle basé sur les événements*** (CBE) comme une méthode de contrôle appropriée pour les systèmes que nous utilisons. Appliquer la commande seulement quand il est nécessaire (quand certains événements interviennent) et jusqu'à ce que certaines conditions sont remplies, permet de simplifier grandement le système de capteurs qui équipent le procédé (seulement une détection de seuil est nécessaire à la place d'un échantillonnage continu). Le contrôle basé sur les événements a donc plusieurs avantages :

- Il n'est pas appliqué si ce n'est pas nécessaire.
- Il est efficace quand les mesures de contrôle coûtent très cher, ou quand l'acquisition des données est chère.
- Il est souvent utilisé comme solution pour maintenir le niveau de performance des systèmes qui ont des limitations sur les taux d'échantillonnage, sur la consommation d'énergie [Åström & Bernahardsson, 2002], [Arzen, 1999], [Cogill et al., 2007], ou pour les systèmes biologiques [Yamamoto, 1996].

Le principal inconvénient est le manque de théorie sur le contrôle basé sur les événements. Une référence analytique souvent utilisée est représentée par les études de [Åström, 2008].

De point de vue de l'applicabilité, le contrôle basé sur les événements devient de plus en plus utilisé pour beaucoup des systèmes pratiques. Dans l'industrie manufacturière les unités sont séparées par des stocks tampon pour alléger les variations de production et pour maintenir un certain taux de production. Mais il y a toujours des perturbations ou des changements du taux de production si les niveaux des stocks arrivent aux limites maximales ou minimales. Dans ce cas, le contrôle basé sur les événements sera appliqué seulement lorsque les limites sont atteintes ou des défaillances critiques interviennent. Une première tentative a été réalisée par [Petterson, 1969] suivie plus récemment d'une mise à jour dans un nouveau projet [Petterson et al., 2006].

Dans la littérature la terminologie de contrôle basé sur les événements n'est pas la même selon les auteurs. Même si parfois il porte le nom d'échantillonnage orienté

événement [Åström, 2008] - [Heemels et al., 2007], échantillonnage Lebesgue [Otanez et al., 2002], ou commande asynchrone [Heemels et al., 1999], en général le CBE désigne une action de contrôle qui ne s'applique pas à des instants précis, mais "sur demande" à cause de certaines erreurs ou à cause de certains événements qui se produisent. Si dans les premières études [Arzen, 1999] - [Kwon et al., 1999] le contrôle basé sur les événements a été étudié à travers des expériences et des simulations, dans les études plus récentes, [Åström & Bernahardsson, 2002] a obtenu des résultats analytiques pour un système du premier ordre en faisant des comparaisons sur la performance des systèmes avec un contrôle basé sur les événements et des systèmes commandés avec un échantillonnage continu. Les derniers ont montré que dans certaines conditions, la commande basée sur les événements peut fournir une meilleure performance car la communication peut être réduite sur des intervalles de temps avec des faibles perturbations et augmentée sur des intervalles avec des fortes perturbations aléatoires. Récemment, en [Henningsson et al., 2008] cet aspect stochastique de l'analyse du contrôle basé sur les événements a été étendu.

En général pour le type de système que nous avons considéré, une zone de fonctionnement sera définie dans laquelle aucune décision de contrôle ne sera effectuée. Le contrôle sera appliqué seulement quand les limites seront atteintes pour redresser le système et le ramener dans une zone normale de fonctionnement. Une vérification sur les sorties va permettre de décider si nous allons intervenir ou pas sur l'entrée du système. La structure générale en boucle fermée pour un système stochastique à commutation va se transformer selon la Figure 1.12.

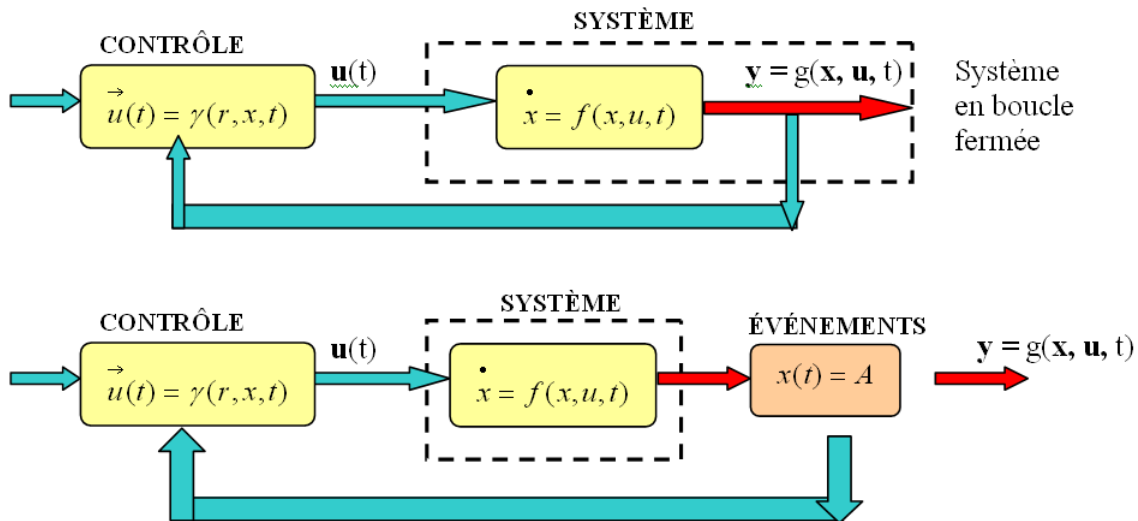


FIGURE 1.12 – Systèmes en boucle fermée avec contrôle basé sur les événements.

Le module des événements ajouté au diagramme en boucle fermée va générer un signal

lorsqu'un événement va se produire (par exemple si la limite de la zone de contrôle est atteinte : $x(t) = A$). Ce signal sera transmis à l'entrée du système pour modifier les paramètres d'entrée et déclencher le contrôle. L'absence d'un événement est considérée aussi comme une information valide car aucune mesure ne sera prise.

Dans la suite nous allons présenter un exemple de système stochastique à commutation pour lequel nous pouvons appliquer le contrôle basé sur les événements.

1.7 Modèle de base de système stochastique à commutation avec CBE

Pour expliquer et motiver la théorie que nous avons présentée dans ce chapitre nous allons partir d'un exemple de système simple, qui serait le leitmotiv de nos études. Il sera résolu de manière théorique puis simulé avec une méthode adaptée à son comportement hybride. Soit un système stochastique à dynamique continue (un réservoir d'eau par exemple, [Cassandras & Lygeros, 2006]), avec une variable d'état continue dans le temps ($x(t)$) défini par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = Q_i(t) - Q_o(t) \tag{1.7.1}$$

où $x(t)$ est la variable d'état, $Q_i(t)$ le débit d'entrée, $Q_o(t)$ le débit de sortie. Principalement $x(t)$ représente le contenu d'un réservoir d'eau qui change à travers les modifications sur les débits d'entrée et de sortie. Cet aspect va définir les états globaux de fonctionnement du réservoir : a) une forte consommation d'eau (donc $Q_i(t) - Q_o(t) < 0$) et b) une faible consommation d'eau ($Q_i(t) - Q_o(t) > 0$). De tels systèmes sont très intéressants quand ils deviennent des composantes interconnectées dans un réseau de débit plus grand. La sortie d'un tel nœud peut devenir l'entrée d'un ou de plusieurs nœuds.

De plus, des mesures de contrôle peuvent être imposées sur les nœuds afin de pouvoir obtenir certaines performances. La Figure 1.13 donne une représentation graphique de ce système avec une zone de contrôle $[X_{min}, X_{max}]$ imposée sur l'évolution de la variable continue $x(t)$.

La nature hybride du système est caractérisée par la dynamique continue de la variable d'état $x(t)$ et par les commutations aléatoires entre ses deux états de fonctionnement, qui se produisent à cause des événements incontrôlables (la variation du débit d'entrée et de sortie ($Q_i(t)$, $Q_o(t)$), les défaillances de fonctionnement) ; en conséquence l'évolution du niveau d'eau $x(t)$ à l'intérieur du réservoir est complètement aléatoire. De plus, le comportement du système est aussi influencé par les événements d'arrivée aux limites de la zone de contrôle, comme par exemple quand $x(t) = X_{min}$ où quand $x(t) = X_{max}$.

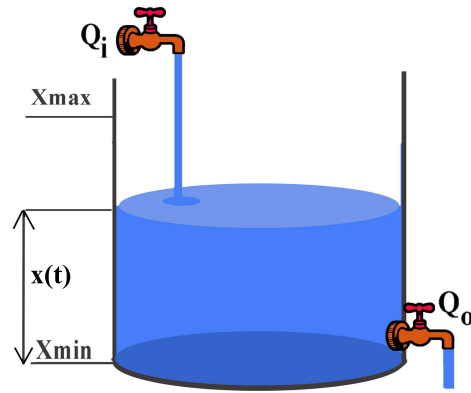


FIGURE 1.13 – Réservoir d'eau avec débit d'entrée et de sortie

Appliquer le contrôle pour ce système, quand la zone de contrôle est atteinte, se fait donc en rajoutant d'autres sources de débit ou de consommation jusqu'à ce que le niveau revienne dans une zone de fonctionnement normal $[X_L; X_H]$. Le système devient :

$$\dot{x}(t) = Q_i(t) - Q_o(t) + u(x(t))$$

où

$$u(x(t)) = \begin{cases} -Q_c(t) & ,\text{si } x(t) = X_{max} \\ +Q_c(t) & ,\text{si } x(t) = X_{min} \end{cases} \quad (1.7.2)$$

avec des mesures $Q_u(t)$ choisies tel que :

$$\begin{cases} Q_i(t) - Q_o(t) + u(x(t)) < 0 & ,\text{si } x(t) \in [X_{max}, X_H] \\ Q_i(t) - Q_o(t) + u(x(t)) > 0 & ,\text{si } x(t) \in [X_{min}, X_L] \end{cases} \quad (1.7.3)$$

Une représentation graphique du contrôle appliqué sur le réservoir est donnée dans la Figure 1.14. Nous parlons donc d'un contrôle basé sur les événements que nous avons défini dans la section précédente. Dans la Figure 1.14 a) on peut observer que lorsque le niveau d'eau est arrivé à la capacité maximale du réservoir ($x(t) = X_{max}$) le contrôle sera appliqué (en ouvrant par exemple une pompe d'évacuation) jusqu'à une limite supérieure (X_H) où on considère que le système aura un niveau d'eau raisonnable pour fonctionner ; de la même façon, quand le niveau d'eau est très bas ($x(t) = X_{min}$), une source externe d'approvisionnement sera ajoutée au système pour assurer une quantité raisonnable d'eau et faire monter le niveau jusqu'à ($x(t) = X_L$).

Les modèles de ce type sont régulièrement utilisés dans la gestion des ressources d'eau ou dans des processus chimiques. Ils ont une applicabilité large pour des systèmes plus

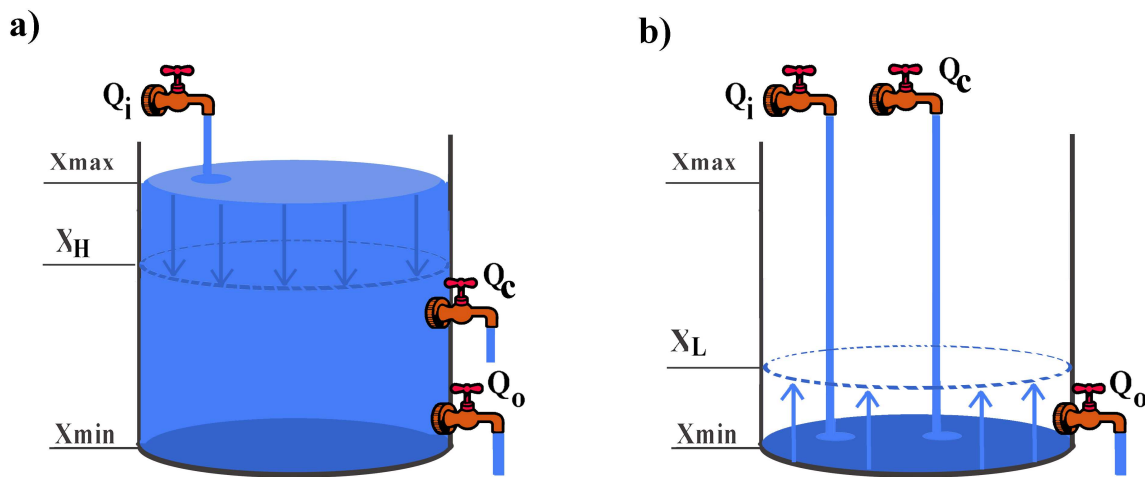


FIGURE 1.14 – a) Contrôle appliqué quand $x(t) = X_{max}$, b) Contrôle appliqué quand $x_u(t) = X_{min}$

complexes où le mouvement des parties discrètes se résume à un flux (les pièces dans des systèmes de production [Suri & Fu, 1991] - [Yu & Cassandras, 2004], les paquets dans les réseaux de communication ou les voitures dans un système de transport).

Un autre exemple de SSC est l'Internet où le cadre de modélisation est représenté par des files d'attente de paquets d'information. Compte tenu du trafic très intense, une modélisation paquet par paquet est impossible et les concepts de la théorie analytique pour les systèmes de fabrication ne sont pas efficaces. En revanche la modélisation en utilisant les SSC donne la possibilité d'agréger plusieurs événements associés au mouvement de plusieurs entités dans un seul événement de commutation à taux constant. La modélisation des réseaux de communication avec des systèmes stochastiques fluides a été introduite par [Anick et al., 1982] et utilisée plus tard pour la simulation des flux des données, et pour l'évaluation des réseaux de grande vitesse [Kobyashi & Ren, 1992] - [Bohacek & Hespanha, 2003].

Notre objectif principal est le contrôle des SSC en passant par une méthode probabiliste qui sera construite tout au long de nos études. En retournant sur l'exemple présenté dans cette section, appliquer le CBE quand la zone de contrôle est atteinte ou quand des fluctuations aléatoires se produisent sur les débits entrée-sortie, devient un problème très complexe. L'objectif principal est de maintenir la variable d'état du système dans la zone de contrôle $[X_{min}, X_{max}]$ en utilisant une énergie minimale. On cherche donc à déterminer le contrôle qui minimise un coût quadratique de performance de type :

$$J = E \left[\int_0^T q \cdot x^2(t) + r \cdot u^2(t) dt \right]$$

où $u^2(t)$ représente l'énergie consommée par le système pour appliquer le contrôle, $E[x^2(t)]$ est le moment d'ordre 2 que nous avons introduit dans la Section 1.4.2, et q, r sont des constantes tels que $q \geq 0$ et $r > 0$. Ce critère quadratique répond aux besoins du système qui a un comportement spécifique chaque fois qu'il retourne dans la zone de fonctionnement sans contrôle $[X_L; X_H]$. A partir de ces deux points d'arrêt du contrôle (X_H, X_L) , le système va redémarrer dans un état sans contrôle pour une période indéterminée et aléatoire. Ce comportement nous donne la possibilité de minimiser l'énergie globale que le système consomme à partir des énergies minimales consommées sur chaque période de fonctionnement de ce type. Une discussion plus détaillée sera donnée dans les chapitres suivants.

Supposons que dans l'exemple du réservoir que nous avons donné comme exemple, l'entrée est la chute de pluie ; il est difficile de construire un modèle qui prévoit la chute et la quantité de pluie. Cependant il est possible de construire un modèle probabiliste pour la chute de pluie et de l'intégrer dans le modèle de base du système.

Pour appliquer le contrôle basé sur les événements en respectant un critère quadratique de performance, nous avons construit un modèle d'énergie stationnaire. Dans le Chapitre 2 nous allons introduire le système stochastique à commutation à états multiples qui nous intéresse ; pour ce système nous allons construire dans le Chapitre 4 un modèle d'énergie probabiliste qui prendra en compte les probabilités d'atteindre les limites de la zone de contrôle dans un certain temps moyen.

1.8 Conclusions

Dans ce Chapitre nous avons défini le principal type de système qui nous intéresse : les systèmes stochastiques à commutation et leurs caractéristiques hybrides. Nous avons introduit l'aspect stochastique du système qui nous a permis de choisir la méthode de modélisation par les chaînes de Markov avec de taux de variation associés aux états. Une discussion sur les événements externes aléatoires et leur influence sur le comportement du système a été présentée à travers des exemples. Nous avons aussi présenté les caractéristiques générales du contrôle basé sur les événements et les difficultés d'appliquer un tel contrôle sur des systèmes à commutations. Un exemple de systèmes stochastique à commutation a été aussi fourni à la fin de ce chapitre.

Chapitre 2

Intégrateur stochastique à commutation à états multiples

Dans ce chapitre nous introduisons le modèle que nous utilisons et qui est la base de nos études. Nous allons définir ses conditions de fonctionnement et ses propriétés, avec et sans le contrôle basé sur les événements.

2.1 Modèle non contrôlé

Dans le Chapitre 1 nous avons établi le type de systèmes qui nous intéressent : les systèmes stochastiques à commutation, qui seront modélisés en utilisant des chaînes de Markov en temps continu, avec des taux de variation (des récompenses) attachés à chaque état. Nous allons appeler notre système stochastique : un intégrateur commuté (non contrôlé) avec une seule variable d'état par sommet, qui se décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_{Z(t)} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

avec $x(t)$ la variable d'état, $x_0 \in \mathbb{R}$ l'état initial du système, $Z(t)$ la chaîne de Markov avec des taux de variation, qui est associée au système et qui prend des valeurs dans l'espace d'état fini $S = \{1, 2, \dots, N\}$; $r_{Z(t)}$ sont les taux constants de variation de la variable continue $x(t)$ de telle sorte que :

$$\begin{cases} r_i > 0, \forall i \in \{1, \dots, M\} \\ r_j < 0, \forall j \in \{M + 1, \dots, N\} \end{cases} \quad (2.1.2)$$

La chaîne de Markov est représentée par la matrice de taux de transition suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} -\sum_{j \neq 1} \lambda_{1,j} & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,N} \\ \lambda_{21} & -\sum_{j \neq 2} \lambda_{2,j} & \dots & \lambda_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{N,1} & \lambda_{N,2} & \dots & -\sum_{j \neq N} \lambda_{N,j} \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_{i,j}$ le taux de transition entre l'état i et l'état j . La probabilité de transition entre i et j est donc :

$$p_{i,j} = \frac{\lambda_{i,j}}{\sum_{j \neq i} \lambda_{i,j}} \quad (2.1.3)$$

Prenons comme exemple un intégrateur stochastique à commutation, représenté par la Figure 2.1 et ayant seulement deux états globaux, avec des taux de variation de signe différent, associés aux états : $r_1 = 2 > 0$, $r_2 = -1 < 0$. En utilisant les notations de [Cassandras, 2008], nous notons :

- σ_1 l'événement de transition entre l'état 1 et l'état 2 après une période de transition aléatoire qui dépend du taux de transition λ , et
- σ_2 l'événement de transition entre l'état 2 et l'état 1 après une période de transition aléatoire qui dépend du taux de transition μ .

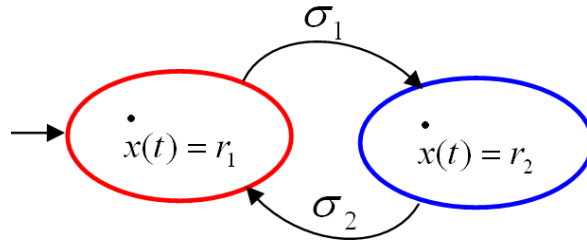


FIGURE 2.1 – Représentation stochastique hybride pour l'intégrateur à commutation non contrôlé à deux états.

Si nous utilisons la représentation graphique de la Figure 1.5 pour notre exemple de système à deux états, alors on peut représenter la variable d'état, $x(t)$, les taux de variation caractéristiques à la chaîne de Markov, $Z(t)$, et le taux de variation accumulé, $Y(t)$, dans la Figure 2.2. Dans cette figure, le système démarre dans l'état 1 et seuls les quatre premiers instants de commutation sont représentés.

En suivant son évolution, nous observons que ce type de système est caractérisé par une interaction entre la partie continue (la variable d'état continue, $x(t)$) et la partie discrète (la chaîne de Markov, $Z(t)$) avec des transitions arbitraires entre ses états globaux. Quand nous parlons donc d'un *état global* du système, nous parlons en effet de la

paire $(x(t), Z(t))$ qui caractérise complètement l'évolution du système au moment t d'un point de vue continu et discret. Dans la suite et dans le reste de ce mémoire, nous allons utiliser la notation d'*état* à la place d'*état global* du système stochastique à commutations, afin de simplifier les notations utilisées.

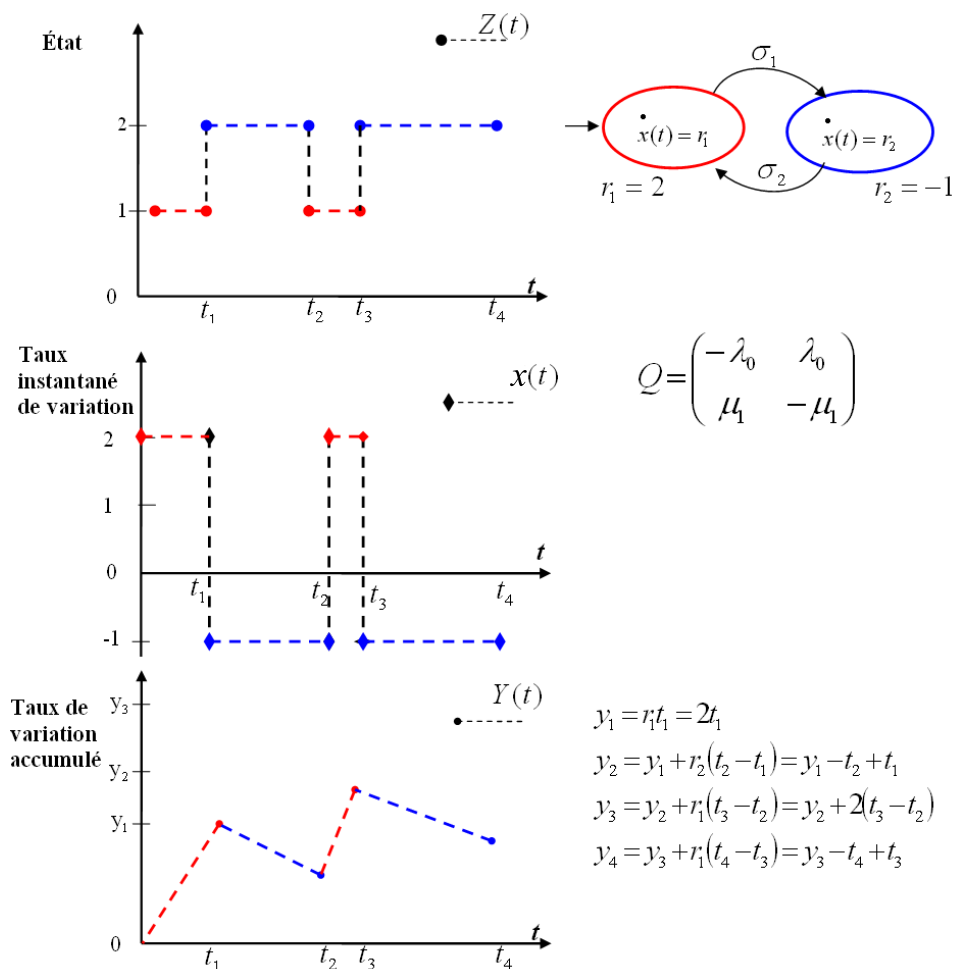


FIGURE 2.2 – Réalisation de $X(t)$, $Z(t)$, $Y(t)$ pour l'intégrateur commuté à deux états sans contrôle.

2.2 Modèle avec contrôle

Dans la section précédente nous avons défini le modèle de système stochastique à commutation sans contrôle, dont le comportement est régi par les transitions aléatoires entre les états du système. Si dans la Figure 2.2 nous avons représenté seulement quelques commutations entre les états, dans la Figure 2.3 nous représentons une évolution plus longue du comportement de cet intégrateur commuté à deux états. Nous observons alors

que le système aura un comportement arbitraire et que $x(t)$ pourra prendre des valeurs soit trop grandes, soit très petites. Dans le cas d'applications pratiques, la plage de fonctionnement du système doit être limitée, plus spécifique, des valeurs limites doivent être imposées à la variable d'état $x(t)$.

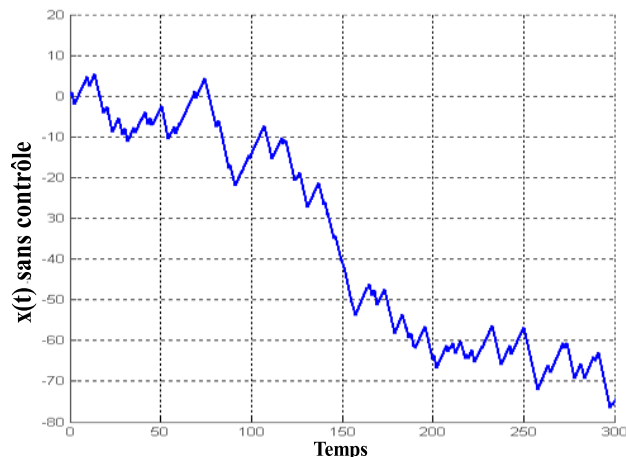


FIGURE 2.3 – Exemple de trajectoire aléatoire d'un intégrateur à commutation non contrôlé.

Notre objectif principal est donc de maintenir la variable d'état du système dans un intervalle de fonctionnement normal : $x(t) \in [X_{min}, X_{max}]$ et ce, en utilisant une énergie minimale. Les limites de contrôle, imposées pour le fonctionnement du système, représentent des événements qui changent le comportement du système. Le contrôle sera appliqué afin de forcer le système à retourner dans sa zone normale de fonctionnement. Nous appelons ce contrôle adapté aux événements, le *contrôle basé sur les événements*.

Comme nous l'avons présenté dans la Section 1.6, le contrôle basé sur les événements est souvent considéré comme une approche naturelle pour certains systèmes à commutation parce qu'il réagit rapidement aux perturbations et avec de bonnes performances. Dans [Åström, 2008] il a été montré, pour quelques exemples, que ce type de contrôle peut être appliqué à des systèmes ayant plusieurs périodes d'échantillonnage, à des systèmes distribués et à retards (qui rendent les systèmes classiques de données échantillonnées difficiles à étudier). Nous avons adopté un contrôleur basé sur les événements car nous le considérons adapté pour exploiter les divers événements définis par les objectifs de la commande.

Chaque fois qu'une des limites a été atteinte, le contrôle est appliqué, jusqu'à ce que $x(t)$ atteigne une des limites permettant l'arrêt du contrôle : $\{X_H, X_L\}$. Nous utilisons la notion de *contrôle supérieur* pour le contrôle appliqué dans la zone supérieure $(X_H, X_{max}]$ et *contrôle inférieur* pour le contrôle appliqué dans la zone inférieure $[X_{min}, X_L)$. La Figure 2.4 représente des exemples de trajectoires de l'intégrateur à commutation, avec

ou sans le contrôle basé sur les événements, qui correspondent à la description suivante de l'évolution du système :

- *aucun contrôle* n'est appliqué si :
 - la variable d'état $x(t)$ est dans la zone sans contrôle : $[X_L, X_H]$, ou
 - la variable d'état est dans l'intervalle supérieur de contrôle (X_H, X_{max}) et aucun contrôle n'a pas été nécessaire avant l'instant t , ou
 - la variable d'état est dans l'intervalle inférieur de contrôle (X_{min}, X_L) et aucun contrôle n'a pas été nécessaire avant l'instant t ;
- le *contrôle supérieur* est appliqué si la limite maximale a été atteinte ($x(t) = X_{max}$) ou si le vecteur d'état est toujours dans l'intervalle supérieur de contrôle alors que le contrôle a été appliqué avant l'instant t ; ce que signifie que le contrôle sera appliqué jusqu'à $x(t) = X_H$;
- le *contrôle inférieur* est appliqué si la limite minimale a été atteinte ($x(t) = X_{min}$) ou si le vecteur d'état est toujours dans l'intervalle inférieur de contrôle alors que le contrôle a été appliqué avant l'instant t ; ce que signifie que le contrôle sera appliqué jusqu'à $x(t) = X_L$.

Tenant compte des spécifications mentionnées, l'équation différentielle pour le système avec contrôle (2.1.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_{Z(t)} + u_{Z(t)}(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

avec

$$u_{Z(t)}(x(t)) = \begin{cases} 0 & ,\text{si } C_1 \\ -QH_l & ,\text{si } C_2, \forall l \in \{1, 2..N\} \\ +QL_m & ,\text{si } C_3, \forall m \in \{1, 2..N\} \end{cases} \quad (2.2.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 : \quad (x(t) \in [X_L, X_H]) \vee \\ \quad (x(t) \in (X_H, X_{max}) \wedge u(Z(t - \Delta t)) = 0) \vee \\ \quad (x(t) \in (X_{min}, X_L) \wedge u(Z(t - \Delta t)) = 0) \\ C_2 : \quad (\text{état}=l) \wedge [(x(t) = X_{max}) \vee \\ \quad (x(t) \in (X_H, X_{max}) \wedge u(Z(t - \Delta t)) \neq 0)] \\ C_3 : \quad (\text{état}=m) \wedge [(x(t) = X_{min}) \vee \\ \quad (x(t) \in (X_{min}, X_L) \wedge u(Z(t - \Delta t)) \neq 0)] \end{array} \right.$$

Nous utilisons la notation QH_l pour le *contrôle supérieur* appliqué quand la chaîne de Markov est dans l'état l , et QL_m pour le *contrôle inférieur* appliqué en état m , quant à Δt , il représente un intervalle de temps infinitésimal.

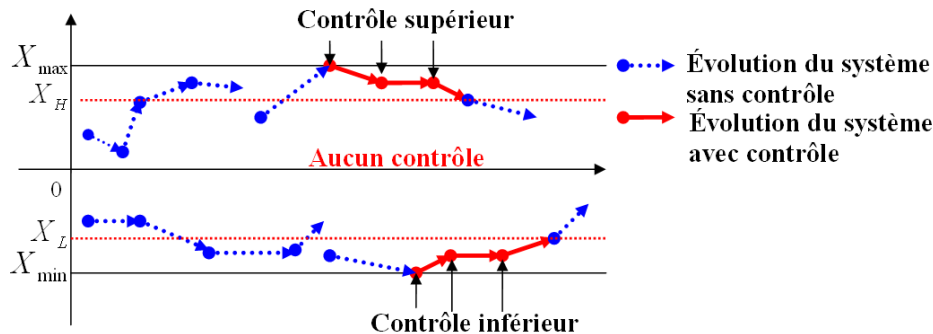


FIGURE 2.4 – Diverses trajectoires possibles de l'intégrateur à commutation avec contrôle.

Il est important de spécifier que pour appliquer le contrôle basé sur les événements, QH_l et QL_m seront choisis de telle sorte que :

$$\begin{cases} r_l - QH_l < 0 & , \forall QH_l > 0, l \in \{1, \dots, N\} \\ r_m + QL_m > 0 & , \forall QL_m > 0, m \in \{1, \dots, N\} \end{cases}$$

Si nous représentons l'intégrateur à commutation (2.2.1) avec le contrôle basé sur les événements, l'automate stochastique hybride à deux états de la Figure 2.1 se transforme en l'automate stochastique hybride à six états représenté par la Figure 2.5. L'ensemble d'états devient alors : $\{1NC, 2NC, 1HC, 2HC, 1LC, 2LC\}$ où $\{1NC, 2NC\}$ sont les deux états du système sans contrôle, $\{1HC, 2HC\}$ sont les états avec contrôle supérieur (dans la zone $(X_H, X_{max}]$) et $\{1LC, 2LC\}$ sont les états avec le contrôle inférieur (dans la zone $[X_{min}, X_L]$). Ainsi l'état 1NC signifie que la chaîne de Markov est dans l'état 1 sans contrôle, c'est à dire que la variable continue : $\{\dot{x}(t) = r_1\}$. Contrairement à 1HC qui signifie que la chaîne de Markov est dans l'état 1 et que le contrôle supérieur est appliqué, c'est à dire que $\{\dot{x}(t) = r_1 - QH_1\}$, etc.

Afin de spécifier les conditions de transition d'un état à un autre, nous devons définir les événements qui peuvent intervenir. Nous allons dénommer :

- **événements incontrôlables de la chaîne de Markov** : les événements qui sont indépendants des frontières extrêmes (et des limites pour arrêter le contrôle) et qui font commuter le système entre les états ayant le même type de contrôle (*aucun, supérieur* ou *inférieur*) ; ces événements sont représentés par $\{\sigma_1, \sigma_2\}$.
- **événements de contrôle** : les événements qui peuvent changer le type de contrôle appliqué au système. Nous utilisons la notation $x \uparrow X_{max}$ et $x \downarrow X_{min}$ pour les événements engendrant l'atteinte de la limite maximale respectivement minimale, et $x \downarrow X_H$ respectivement $x \uparrow X_L$ pour les événements engendrant l'arrêt du *contrôle supérieur* ou *inférieur*. Ces transitions sont également représentées par

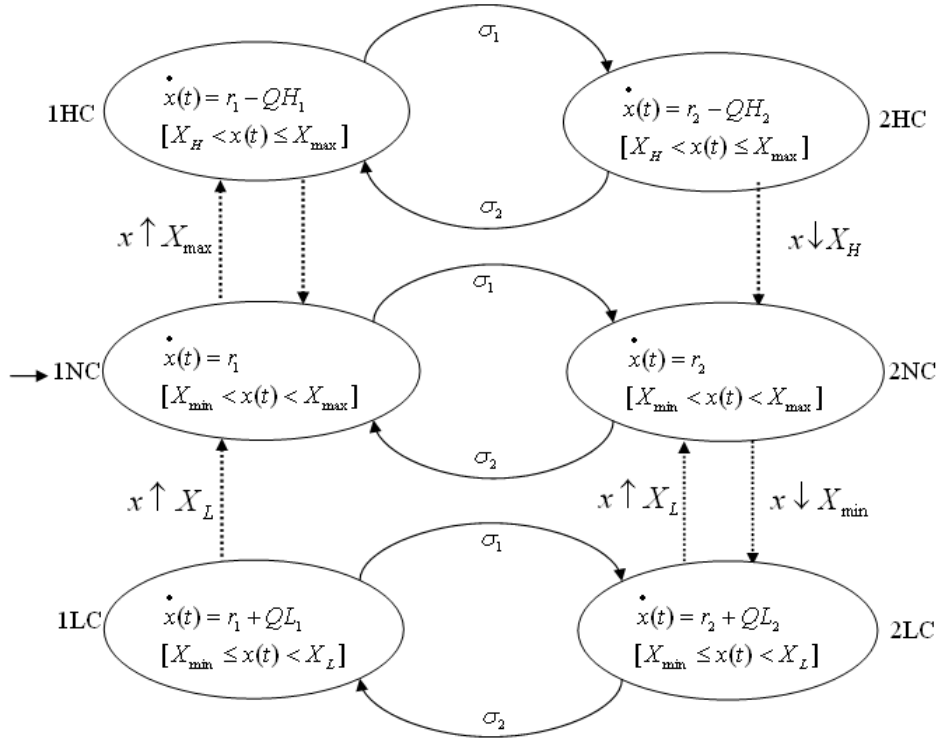


FIGURE 2.5 – Représentation stochastique hybride pour un intégrateur à commutation à deux états avec le contrôle basé sur les événements.

des flèches en pointillées dans la Figure 2.5. Les notations pour le passage d'un état sans contrôle vers un état contrôlé représentent effectivement les garde des automates hybrides que nous avons défini dans la Section 1.5.2.

Il est évident que le système peut atteindre la limite maximale X_{max} seulement si il est dans un état i avec $r_i > 0$, et X_{min} dans un état j avec $r_j < 0$. Si $\{x(t) = X_{max}\}$ le contrôle supérieur sera appliqué et la dynamique du système devient $\{\dot{x}(t) = r_{Z(t)} - \mathcal{Q}H_l < 0\}$ ce qui va forcer la variable d'état à diminuer jusqu'à $\{x(t) = X_H\}$, point à partir duquel le contrôle sera désactivé. De la même manière, quand $\{x(t) = X_{min}\}$ le contrôle inférieur sera appliqué tel que $\{\dot{x}(t) = r_{Z(t)} + \mathcal{Q}L_m > 0\}$ et jusqu'à $\{x(t) = X_L\}$.

2.3 Critère quadratique de performance

Puisque les transitions entre les états sont aléatoires, l'arrivée aux limites de l'intervalle de contrôle sera aussi aléatoire et sera suivie par l'application du contrôle. En regardant la Figure 2.4, nous pouvons décrire le comportement du système comme une alternance de "redémarrage" entre deux points X_H et X_L (périodiquement le système va "redémarrer" soit à partir du point X_H soit à partir du point X_L). La période dans

laquelle le système va redémarrer est aléatoire et peut être définie, par exemple, par l'évolution libre du système entre X_H et X_{max} suivie par l'évolution contrôlée entre X_{max} et X_H . Il faut donc prendre en considération toutes les combinaisons possibles (quatre pour le système considéré). Comme cette période de redémarrage est inconnue, un traitement analytique complexe est nécessaire. Dans le Chapitre 4 nous allons construire un modèle probabiliste de l'énergie consommée par le système quand le contrôle basé sur les événements est appliqué. Également nous proposons une méthode de calcul pour ces périodes de redémarrage.

Le traitement analytique d'un tel système est difficile mais ses caractéristiques de redémarrage nous permettent de définir le critère quadratique de performance suivant :

$$J = E \left[\int_0^T [q \cdot x^2(t) + r \cdot u^2(t)] dt \right], q, r > 0. \quad (2.3.1)$$

où $u^2(t)$ représente l'énergie consommée par le système pour appliquer le contrôle, $E[x^2(t)]$ est le moment d'ordre 2 que nous avons introduit dans la Section 1.4.2, et T est la période moyenne de redémarrage. Nous reviendrons sur ce critère et sur les méthodes d'approximation permettant de calculer l'énergie consommée quand le contrôle basé sur les événements est appliqué, dans le 4ème chapitre. Par ailleurs nous montrerons dans le Chapitre 3 qu'il est possible de calculer directement cette énergie au cours des simulations.

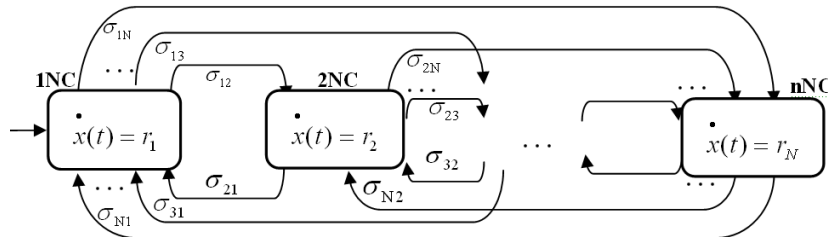


FIGURE 2.6 – Automate stochastique hybride pour un intégrateur à commutation aux états multiples sans contrôle.

2.4 Intégrateurs interconnectés

Dans la Figure 2.5 nous avons donné la représentation hybride stochastique pour un intégrateur contrôlé à deux états. Mais pour un intégrateur à plusieurs états, l'automate va prendre une forme plus complexe, qui nous permet d'avoir une vision globale des transitions du système (Figure 2.6). Appliquer le contrôle basé sur les événements devient

une méthode laborieuse qui nécessite une analyse détaillée de l'aspect probabiliste de transition entre les différents états (Figure 2.7).

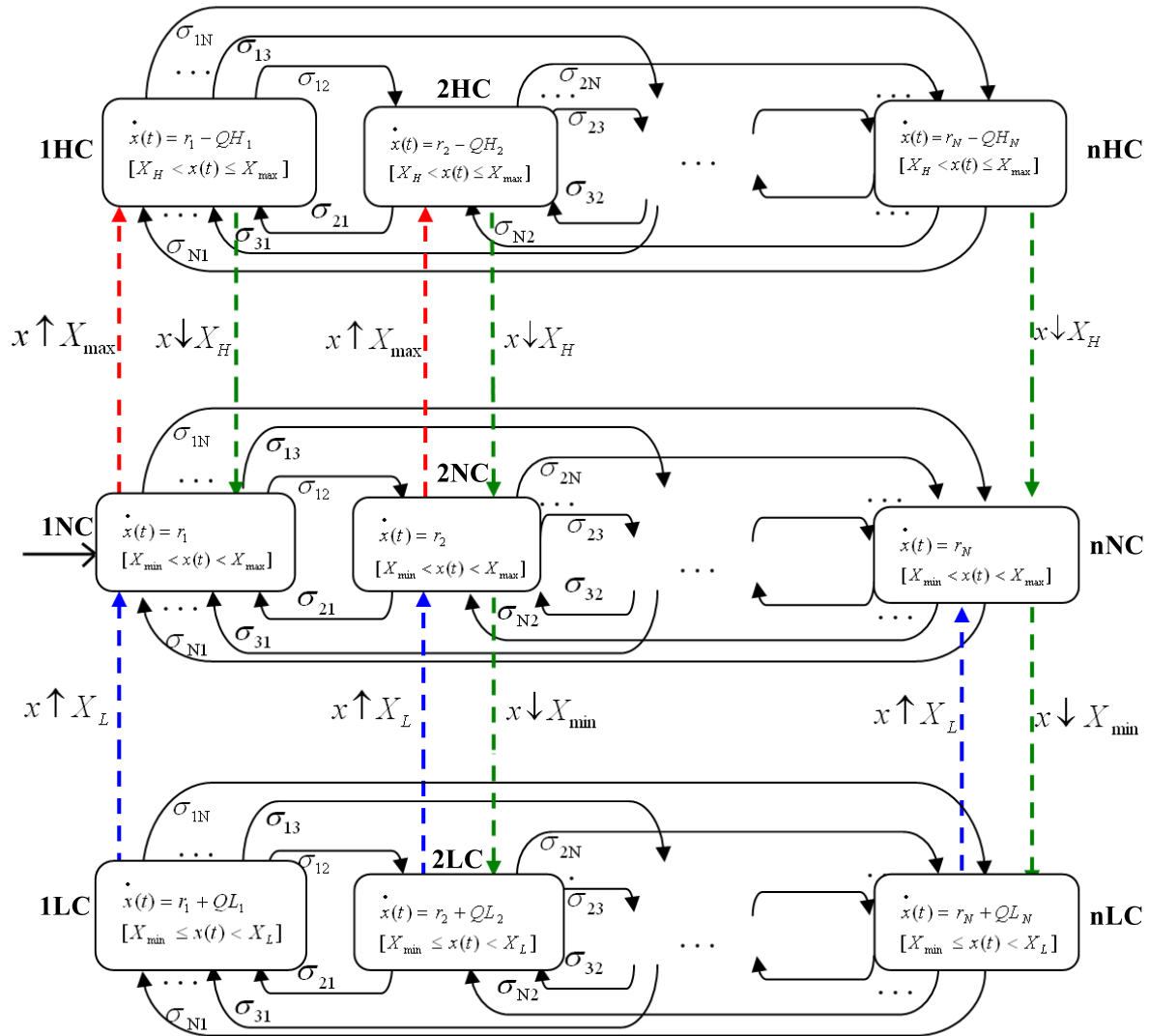


FIGURE 2.7 – Automate stochastique hybride pour un intégrateur à commutation contrôlé aux états multiples.

Le système que nous avons défini dans ce chapitre peut modéliser le réservoir d'eau que nous avons présenté comme exemple dans la section 1.7 ; les états ayant un taux de variation négatif représentent, par exemple, une forte consommation d'eau ($r_{Z(t)} < 0$), et celles avec un taux de variation positif ($r_{Z(t)} > 0$), une faible consommation d'eau. Le contrôle sera appliqué si le niveau d'eau est arrivé à la limite maximale ou minimale du réservoir pour maintenir toujours un niveau d'eau raisonnable.

Un aspect intéressant de ce type de systèmes est la possibilité d'interconnexion dans

un réseau plus grand où la sortie d'un nœud peut devenir l'entrée d'un autre, comme représenté dans la Figure 2.8. Dans cet exemple, le système complet contient plusieurs réservoirs (N), chacun ayant une entrée $Q_i^j(t)$ ($j \in S$) mais une sortie commune $Q_o(t)$. Dans ce cas la dynamique du système pourra être exprimée comme un ensemble d'équations différentielles caractéristiques à chaque réservoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = Q_{i1}(t) - Q_o(t) \\ \dot{x}_2(t) = Q_{i2}(t) - Q_o(t) \\ \dot{x}_3(t) = Q_{i3}(t) - Q_o(t) \\ \dots \\ x_1(0) = x_1 \\ \dots \end{array} \right. \quad (2.4.1)$$

Les commutations entre les états vont dépendre du niveau d'eau dans chaque réservoir, par exemple une transition sera valide si :

$$\{x_1(t) \in [X_{min}, X_{max}] \& x_2(t) \in [X_{min}, X_{max}] \& \dots\} \text{ ou } \\ \{x_1(t) = X_{min} \& x_2(t) \in [X_{min}, X_{max}] \& \dots\}$$

Cette structure complexe de N réservoirs interconnectés nécessite une analyse spéciale qui entre dans nos perspectives de travail.

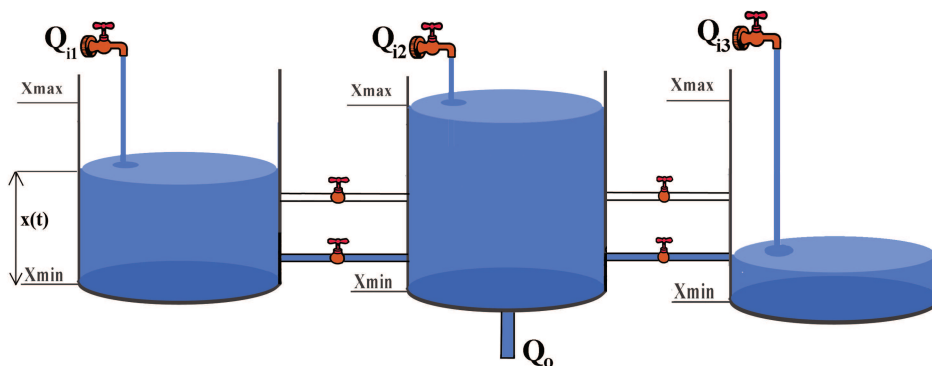


FIGURE 2.8 – Multiples réservoirs interconnectés

Un autre exemple de système avec plusieurs connexions de systèmes stochastiques à commutation, est un logiciel sur une machine de calcul à plusieurs cœurs, qui doit assurer la continuité d'une application où les tâches arrivent de façon aléatoire. Le logiciel fait la distribution des tâches de la manière suivante : il utilise des mémoires tampon (buffers) pour stocker les tâches de chaque cœur ; si un buffer est plein alors les nouvelles tâches

qui arrivent seront attribuées à un autre buffer jusqu'à ce que le premier soit de nouveau disponible, etc.

Le travail que nous présentons dans ce manuscrit se concentre sur les systèmes stochastiques à commutation de type (2.2.1) à états multiples, comme représenté dans la Figure 2.7.

2.5 Conclusions

Dans ce Chapitre nous avons défini le système de base utilisé pour nos études, qui est un intégrateur stochastique à commutation à états multiples. Nous avons également défini comment appliquer le contrôle basé sur les événements et les conditions de bon fonctionnement.

La résolution analytique du problème de commande optimale est très difficile même pour un système simple. En raison du caractère stochastique du problème, de l'horizon infini et du fait que les taux de transition (r_i) n'ont pas le même signe, une approche directe par la programmation dynamique permettant de résoudre une équation Hamilton-Jacobi-Bellman n'est pas simple. Dans le chapitre suivant nous allons proposer une méthode de simulation pour ce type de système en expliquant les étapes principales.

Chapitre 3

Simulation événementielle en temps continu pour les SSC

Dans ce chapitre nous allons présenter une méthode de simulation en temps continu pour des systèmes stochastiques à commutation avec un contrôle basé sur les événements. Le modèle utilisé est un intégrateur commuté à états multiples, caractérisé par une chaîne de Markov en temps continu. L'objectif principal est de maintenir la variable d'état du système dans les limites imposées. Ainsi, des limites permettant d'arrêter le contrôle ont été considérées durant les simulations. Finalement nous présentons les résultats obtenus pour minimiser un critère quadratique de performance en appliquant le contrôle basé sur les événements.

3.1 Introduction

La simulation numérique est une technique d'analyse puissante mais les méthodes de simulation doivent être soigneusement choisies pour obtenir des résultats précis. Pour les systèmes stochastiques à commutation les méthodes de simulation doivent prendre en compte l'aspect hybride du système : l'évolution continue avec des transitions discrètes et aléatoires. Différentes techniques de simulation ont été développées pour les systèmes industriels [Wei et al., 1989], les systèmes chimiques [Gibson & Bruck, 2000], les réseaux génétiques [Hu et al., 2004], les systèmes biochimiques [Salis & Kaznessis, 2005]. Des algorithmes numériques pour l'analyse d'accessibilité des systèmes stochastiques hybrides sont également fournis dans [Cassandras & Lygeros, 2007].

Simuler le comportement d'un système dynamique avec une évolution aléatoire a une importance majeure pour la compréhension du comportement du système. Par exemple, pour la prévention de pannes de fonctionnement ou pour le traitement de situations

urgentes comme le dysfonctionnement d'un composant, etc. Par conséquent, la simulation doit prendre en compte les événements aléatoires qui peuvent se produire. Dans ce type de *simulation orientée événement* plus connue sous le nom de *simulation à événements discrets*, le comportement d'un système est représenté par une séquence chronologique d'événements qui changent l'état du système. Les principaux aspects que la simulation orientée événement doit prendre en considération sont les suivants :

- La simulation doit stocker les instants auxquels les événements aléatoires se produisent.
- La simulation doit maintenir une liste des événements qui sont susceptibles de se produire ; chaque événement futur est caractérisé par un temps possible de réalisation. Le choix du prochain événement va se réaliser en comparant les temps de réalisation.
- Un générateur de nombres aléatoires est également nécessaire dans la simulation.
- Des statistiques doivent être appliquées sur les données et des mesures spécifiques calculées (des moyennes, des variances, etc.).
- La simulation aura besoin d'une condition logique pour s'arrêter (ou un temps maximal de fonctionnement) car un processus aléatoire peut fonctionner indéfiniment.

Parmi les logiciels utilisés pour réaliser des simulations à événements discrets nous pouvons citer : AnyLogic, ExtendSim, Arena (logiciel d'automatisation à base de modules différents de simulation interconnectés), WITNESS (logiciel de simulation à événements discrets avec interfaces graphiques 2D et 3D), ProModel (utilisé aussi pour des processus à temps continu), etc. En dehors des logiciels commerciaux, d'autres outils open-source peuvent être utilisés : Tortuga, Python, Galatea, etc. Nos premiers travaux sur la simulation à événements discrets ont été réalisés en SimEvents Matlab, qui permet l'interconnexion des divers blocs assurant les fonctionnalités correspondantes aux aspects de simulation décrits ci-dessus. Une structure standard de simulation avec SimEvents est montrée dans la Figure 3.1, dans laquelle certains modules génèrent les événements (Event-based Entity Generator), attribuent des caractéristiques aux événements (Set Attribute) et d'autres produisent les instants aléatoires auxquels les événements se produisent (Event-based Random Number). Malgré une bonne organisation structurelle du logiciel, nous avons rencontré des problèmes de synchronisation entre les événements, qui ont produit des sorties inappropriées au comportement attendu du système. Cette étape nous a mené à construire un algorithme de simulation en temps continu qui répond aux besoins du système que nous utilisons et que nous allons présenter dans ce chapitre.

Notre objectif est donc de proposer un algorithme de simulation pour une classe de systèmes stochastiques à commutation, qui prend en considération aussi bien les événements aléatoires qui peuvent changer l'évolution du système, que les transitions entre les états du système à des instants de temps arbitraires. L'algorithme doit donc respecter les commutations aléatoires entre les divers états globaux du système $(x(t); Z(t))$. Cet

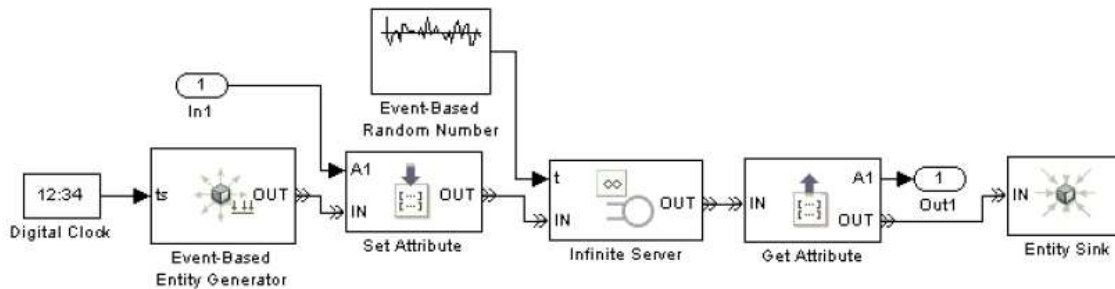


FIGURE 3.1 – Simulation en SimEvents

algorithmes sera utilisé afin de minimiser l'énergie consommée pour appliquer le contrôle et d'assurer certaines mesures de performabilité.

Le point de départ de notre travail s'appuie sur un algorithme de simulation permettant d'évaluer le niveau d'exécution des lignes de production [Suri & Fu, 1991]; cette méthode a été également appliquée par [Royer, 2006] pour la simulation en temps continu du trafic de paquets dans les réseaux de communication. A partir de cet algorithme, nous avons développé un algorithme de simulation en temps continu adapté au système stochastique à commutations que nous avons défini dans le Chapitre 2, et pour lequel nous appliquons le contrôle basé sur des événements.

Dans les sections suivantes nous allons présenter l'algorithme et les étapes principales de l'implémentation.

3.2 Simulation à temps continu

Dans le Chapitre 1 nous avons défini l'objectif du contrôle basé sur les événements que nous appliquons : maintenir la variable $x(t)$ dans une zone de fonctionnement $[X_{min}, X_{max}]$. Comme indiqué dans l'introduction, nous avons adapté l'algorithme de simulation pour des lignes de production en tandem fournis par [Suri & Fu, 1991] aux conditions de contrôle.

Ensuite nous présentons l'algorithme de contrôle adapté pour le système intégrateur à états multiples (2.2.1). En raison de l'occurrence aléatoire des transitions entre les états du système, des statistiques sont également calculées à des instants de temps réguliers. Une période statistique (d_{st}) sera choisie pour le calcul de statistiques sur la variable d'état. Nous allons définir les paramètres que nous allons utiliser pour la simulation.

Nous définissons d'abord les états discrets d'un SSC avec le contrôle basé sur les

événements. Soit $Z(t)$ l'état du système à l'instant t avec :

$$Z(t) = \begin{cases} iNC, & \text{pour } x(t) \in [X_{min}, X_{max}] \text{ et } u_{Z(t)} = 0, i \in \{1, \dots, N\} \\ iHC, & \text{pour } x(t) \in (X_H, X_{max}] \text{ et } u_{Z(t)} = -QH_i \\ iLC, & \text{pour } x(t) \in [X_{min}, X_L) \text{ et } u_{Z(t)} = +QL_i \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Soit N le nombre d'états du système, X l'historique de l'évolution de la variable d'état x aux instants d'événements aléatoires, X_{st} l'historique de x aux instants d'échantillonnage et $\{r_i > 0, r_j < 0\}$ les taux de variation respectivement positifs et négatifs associés aux états $i \in \{1, \dots, M\}, j \in \{M + 1, \dots, N\}$. Par simplicité nous appelons X_{st} la statistique sur la variable d'état. Quand les limites seront atteintes, les paramètres de contrôle seront appliqués de sorte que :

$$\begin{cases} r_l - QH_l < 0 & \text{si } X(t) = X_{max}, l \in \{1, \dots, N\} \\ r_m + QL_m > 0 & \text{si } X(t) = X_{min}, m \in \{1, \dots, N\} \end{cases}$$

Nous définissons également l'ensemble d'événements possibles quand l'état courant est $s \in Z(t)$:

$$E = \{\{\sigma_s\}, \{NH_{ss}\}, \{HN_{ss}\}, \{NL_{ss}\}, \{LN_{ss}\}\} \quad (3.2.2)$$

où chacun de ces événements est défini dans le Tableau 3.1.

Symbole	Événements représentés
$\{\sigma_s\}$	Sortir de l'état s vers un autre état ayant le même type de contrôle
$\{NH_{ss}\}$	Passage de l'état s sans contrôle vers l'état s avec contrôle supérieur
$\{HN_{ss}\}$	Passage de l'état s avec contrôle supérieur vers l'état s sans contrôle
$\{NL_{ss}\}$	Passage de l'état s sans contrôle vers l'état s avec contrôle inférieur
$\{LN_{ss}\}$	Passage de l'état s avec contrôle inférieur vers l'état s sans contrôle

TABLE 3.1 – Liste de tous les événements possibles

Nous considérons λ_s le taux de transition de l'état de départ s vers l'état suivant qui est déterminé par le prochain événement choisi, T_f la longueur de la simulation et $State$ l'historique des états durant la simulation, qui prend des valeurs dans l'ensemble $\{iNC, iHC, iLC\}, i \in \{1, \dots, N\}$. Le comportement aléatoire du système donne des résultats différents à chaque simulation. Par conséquent plusieurs simulations sont nécessaires en utilisant le même ensemble de données ; On note N_r le nombre de simulations appliquées.

Il faut également préciser que les événements $\{\sigma_s\}$ sont caractéristiques à la chaîne de Markov qui à des transitions aléatoires entre les états, alors que $\{NH_{ss}\}, \{HN_{ss}\},$

$\{NL_{ss}\}, \{LN_{ss}\}$ sont déclenchés uniquement par les changements de la variable d'état $x(t)$ (lorsque les limites extrêmes ou les limites d'arrêt du contrôle sont atteintes).

Nous avons également pris en compte le fait que chaque événement est lié à une horloge représentant le temps de la prochaine occurrence de cet événement. Quand l'horloge arrive à zéro, l'événement se déclenche apportant des changements dans l'état du système, selon la description ci-dessus. Nous allons noter T , l'ensemble des instants des prochaines occurrences d'événements :

$$T = \{T_{\sigma_s}, T_{NH_{ss}}, T_{HN_{ss}}, T_{NL_{ss}}, T_{LN_{ss}}\} \quad (3.2.3)$$

Chaque période d'occurrence a la signification suivante :

T_{σ_s} est spécifique à la chaîne de Markov et représente le temps de sortie de l'état s ; il représente un échantillon aléatoire de la distribution exponentielle de taux de transition λ_s . Chaque fois que le système change de type de contrôle, T_{σ_s} est mis à jour de la façon suivante : $T_{\sigma_s} = T_{\sigma_s} - T_{sw}$, où T_{sw} fait partie de l'ensemble $\{T_{NH_{ss}}, T_{HN_{ss}}, T_{NL_{ss}}, T_{LN_{ss}}\}$.

$T_{NH_{ss}}$ représente la durée avant le prochain changement de type de contrôle pour l'état actuel s : de *sans contrôle* vers le *contrôle supérieur*. C'est donc le temps pour atteindre la limite maximale X_{max} dans l'état s ; nous l'exprimons comme $(X_{max} - X(t))/|r_i|$;

$T_{HN_{ss}}$ est le temps nécessaire pour arrêter le *contrôle supérieur* dans l'état s et atteindre X_H ; nous pouvons l'écrire $(X(t) - X_H)/|r_s - QH_s|$.

$T_{NL_{ss}}$ est le temps nécessaire pour passer de *sans contrôle* au *contrôle inférieur* et on l'écrit $(X(t) - X_{min})/|r_s|$; il représente en fait le temps mis pour atteindre la limite minimale X_{min} .

$T_{LN_{ss}}$ représente le temps nécessaire pour atteindre X_L et arrêter le contrôle inférieur; nous pouvons l'écrire comme $(X_L - X(t))/|r_s + QL_s|$.

Nous allons utiliser aussi la notation T_{sim} pour représenter le vecteur des instants d'occurrence d'événements et T_{st} pour le vecteur des instants d'échantillonnage, avec son index L_{st} . La période statistique choisie (d_{st}) sera plus petite que les temps moyens de séjour dans les états de la chaîne de Markov. Elle joue un rôle important car en fonction de cette période nous allons obtenir une mauvaise ou une bonne résolution des statistiques.

Les étapes principales de la simulation sont présentées dans la suite :

1 INITIALISATION DES PARAMÈTRES DU SYSTÈME

N	le nombre d'états du système ;
T_f	la longueur de la simulation ;
N_r	le nombre de simulations effectuées ;
$X(1) = x_0$	la valeur initiale de X ;
$X_{st}(1) = x_0$	la valeur initiale de la statistique ;
$r_i > 0, r_j < 0$	les taux de variation attachés à chaque état ; ($i \in \{1, \dots, M\}, j \in \{M + 1, \dots, N\}$) ;
d_{st}	la période statistique ;
$QH_l > 0, QL_m > 0$	les paramètres de contrôle $l, m \in \{1, \dots, N\}$;
$Z(1)$	l'état initial ;
$T_{sim}(1) = 0$	l'instant initial d'occurrence des événements ;
$T_{st}(1) = 0$	l'instant initial des statistiques ;
$L_{st} = 1$	l'index initial du T_{st} ;
$En_{QH} = 0$	l'énergie consommée pour appliquer le contrôle supérieur ;
$En_{QL} = 0$	l'énergie consommée pour appliquer le contrôle inférieur ;
T	les instants initiaux des prochaines occurrences à partir de l'état $s = Z(1)$ ($T = \{T_{\sigma_s}, T_{NH_{ss}}, T_{HN_{ss}}, T_{NL_{ss}}, T_{LN_{ss}}\}$).

2 CHOISIR L'ÉVÉNEMENT SUIVANT

Une fois que les paramètres du système ont été initialisés, nous analysons les prochains événements possibles pour l'état actuel $s = Z(j)$: le prochain événement à choisir est celui qui correspond au plus court temps d'occurrence :

$$\begin{aligned}
 &\text{tant que } T_{sim}(j) \leq T_f \quad // \text{ choisir le prochain événement possible} \\
 &\Delta t = \min\{T_{\sigma_s}, T_{NH_{ss}}, T_{HN_{ss}}, T_{NL_{ss}}, T_{LN_{ss}}\} \\
 &next_{ev} = \text{prochain événement possible correspondant à } \Delta t \\
 &next_{ev} \in \{\{\sigma_s\}, \{NH_{ss}\}, \{HN_{ss}\}, \{NL_{ss}\}, \{LN_{ss}\}\}
 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

3 ANALYSER L'ÉVÉNEMENT SUIVANT

A partir de l'état actuel du système, nous analysons le prochain événement qui a été choisi. Quand $next_{ev} = \{\sigma_s\}$ le système commute de l'état actuel s vers un autre

état destination d , ayant le même type de contrôle. L'état d sera aléatoirement choisi en comparant les probabilités de transition entre s et les autres états de la chaîne ($p_{s,i}, \{s, i \in Z(t)\}$) ayant le même type de contrôle ($p_{i,i} = 0$). Le prochain temps d'occurrence T_{σ_s} deviendra un échantillon de la distribution exponentielle du temps de séjour dans le prochain état d . D'autre part, quand on change le type de contrôle pour l'état s , alors $T_{\sigma_s} = T_{\sigma_s} - \Delta t$.

cas $next_{ev} = \{\sigma_s\}$

$X(j) \in [X_L, X_H]$

$Z(j) = mNC, m \in \{1, \dots, N\}$ // aucun contrôle

$Z(j+1) = dNC$ // choix aléatoire selon $p_{mNC, nNC}, n \in \{1, \dots, N\}$

Calculer $T_{\sigma_d}, T_{NH_{dd}}, T_{NL_{dd}}$

$X(j) \in (X_H, X_{max})$

$Z(j) = mNC, m \in \{1, \dots, N\}$ // aucun contrôle

$Z(j+1) = dNC$ // choix aléatoire selon $p_{mNC, nNC}, n \in \{1, \dots, N\}$

Calculer $T_{\sigma_d}, T_{NH_{dd}}, T_{NL_{dd}}$

$Z(j) = mHC, m \in \{1, \dots, N\}$ // continuer le *contrôle supérieur*

$Z(j+1) = dHC$ // choix aléatoire selon $p_{mNC, nNC}, n \in \{1, \dots, N\}$

Calculer $T_{\sigma_d}, T_{HN_{dd}}$

$X(j) = X_{max}$ // appliquer le *contrôle supérieur*

$Z(j) = mHC, m \in \{1, \dots, N\}$

$Z(j+1) = dHC$ // choix aléatoire selon $p_{mNC, nNC}, n \in \{1, \dots, N\}$

Calculer $T_{\sigma_d}, T_{HN_{dd}}$

$X(j) \in (X_{min}, X_L)$

$Z(j) = mNC, m \in \{1, \dots, N\}$ // aucun contrôle

$Z(j+1) = dNC$ // choix aléatoire selon $p_{mNC, nNC}, n \in \{1, \dots, N\}$

Calculer $T_{\sigma_d}, T_{NH_{dd}}, T_{NL_{dd}}$

$Z(j) = mLC, m \in \{1, \dots, N\}$ // continuer le *contrôle inférieur*

$Z(j+1) = dLC$ // choix aléatoire selon $p_{mNC, nNC}, n \in \{1, \dots, N\}$

Calculer $T_{\sigma_d}, T_{LN_{dd}}$

$X(j) = X_{min}$ // appliquer le *contrôle inférieur*

$Z(j) = mLC, m \in \{1, \dots, N\}$

$Z(j+1) = dLC$ // choix aléatoire selon $p_{mNC, nNC}, n \in \{1, \dots, N\}$

Calculer $T_{\sigma_d}, T_{LN_{dd}}$

cas $next_{ev} = \{NH_{ss}\}$ // commuter vers le *contrôle supérieur*

$$X(j) \in (X_{min}, X_{max})$$

$$Z(j) = mNC, m \in \{1, \dots, N\}$$

$$Z(j+1) = mHC$$

Mettre à jour $T_{\sigma_s} = T_{\sigma_s} - \Delta t$, Calculer $T_{NH_{ss}}$

cas $next_{ev} = \{NL_{ss}\}$ // commuter vers le *contrôle inférieur*

$$X(j) \in (X_{min}, X_{max})$$

$$Z(j) = mNC, m \in \{1, \dots, N\}$$

$$Z(j+1) = mLC$$

Mettre à jour $T_{\sigma_s} = T_{\sigma_s} - \Delta t$, Calculer $T_{NL_{ss}}$

cas $next_{ev} = \{HN_{ss}\}$ // arrêter le *contrôle supérieur*

$$X(j) \in (X_H, X_{max}]$$

$$Z(j) = mHC, m \in \{1, \dots, N\}$$

$$Z(j+1) = mNC$$

Mettre à jour $T_{\sigma_s} = T_{\sigma_s} - \Delta t$, Calculer $T_{HN_{ss}}$

cas $next_{ev} = \{LN_{ss}\}$ // arrêter le *contrôle inférieur*

$$X(j) \in [X_{min}, X_L)$$

$$Z(j) = mLC, m \in \{1, \dots, N\}$$

$$Z(j+1) = mNC$$

Mettre à jour $T_{\sigma_s} = T_{\sigma_s} - \Delta t$, Calculer $T_{LN_{ss}}$

Tous les cas d'évolution doivent être traités en fonction de la zone de contrôle que nous avons choisie. Ce qu'il faut retenir c'est que dans les zones $[X_{min}, X_L]$ et $[X_H, X_{max}]$, si aucun contrôle n'était pas appliqué jusqu'à l'instant t , alors le système est laissé libre jusqu'à ce que une des limites (X_{min} ou X_{max}) soit atteinte. Et dans le cas où le contrôle était appliqué avant t , celui ci sera maintenu jusqu'à atteindre les limites X_H ou X_L .

4 . MISE À JOUR DU SYSTÈME

Une fois que le prochain événement a été choisi et analysé, une mise à jour est nécessaire sur la variable d'état et sur le temps d'occurrence des événements. r_s est le taux de variation associé à l'état actuel s qui peut prendre des valeurs différentes : $r_s \in \{r_m, (r_m - QH_m), (r_m + QL_m)\}$, $m \in \{1, \dots, N\}$; (par exemple si le *contrôle supérieur* est appliqué dans l'état s alors le taux de variation devient $r_s - QH_s$). Les énergies consommées seront également calculées lorsqu'on applique le *contrôle supérieur* ou *inférieur* dans l'état s . Ces énergies vont intervenir dans le calcul du coût quadratique du

contrôle qui sera défini dans la section suivante.

$$\begin{aligned}
 T_{sim}(j+1) &= T_{sim}(j) + \Delta t; // \text{avancer le temps de simulation} \\
 X(j+1) &= X(j) + r_s \cdot \Delta t; // \text{mise à jour de la variable d'état} \\
 En_{QH} &= En_{QH} + QH_s^2 \cdot \Delta t; // \text{calcul des énergies consommées} \\
 En_{QL} &= En_{QL} + QL_s^2 \cdot \Delta t;
 \end{aligned}$$

5 . STATISTIQUES

Les commutations aléatoires dans le comportement du système déterminent une évolution aléatoire de la variable d'état continu. Nous allons donc calculer des statistiques sur X de façon régulière, selon une période d'échantillonnage choisie d_{st} . Un exemple de l'application des statistiques avec $d_{st} = 1$ est illustré dans la Figure 3.2.

$$\begin{aligned}
 d &= \text{floor}[(T_{sim}(j+1) - T_{st}(L_{st})) / d_{st}]; \\
 \text{si } d = 0 & // \text{aucune mesure ne sera effectuée;} \\
 \text{si } d \geq 1 & // \text{calcul des statistiques successives} \\
 & k = 1 \\
 & \text{tant que } k \leq d \\
 & \quad T_{st}(L_{st} + k) = T_{st}(L_{st}) + k \cdot d_{st}; \\
 & \quad X_{st}(L_{st} + k) = X(j) + r_s * (T_{st}(L_{st} + k) - T_{sim}(j)); \\
 & \quad k = k + 1; \\
 & \text{fin tant que} \\
 & \quad L_{st} = L_{st} + k - 1; \\
 & \text{fin si;} \\
 & j = j + 1; // \text{avancer la simulation} \\
 & \text{fin tant que } // \text{à voir [3.2.4]}
 \end{aligned}$$

6 . FIN SIMULATION

A la fin de la simulation nous calculons les statistiques suivantes : la moyenne de la

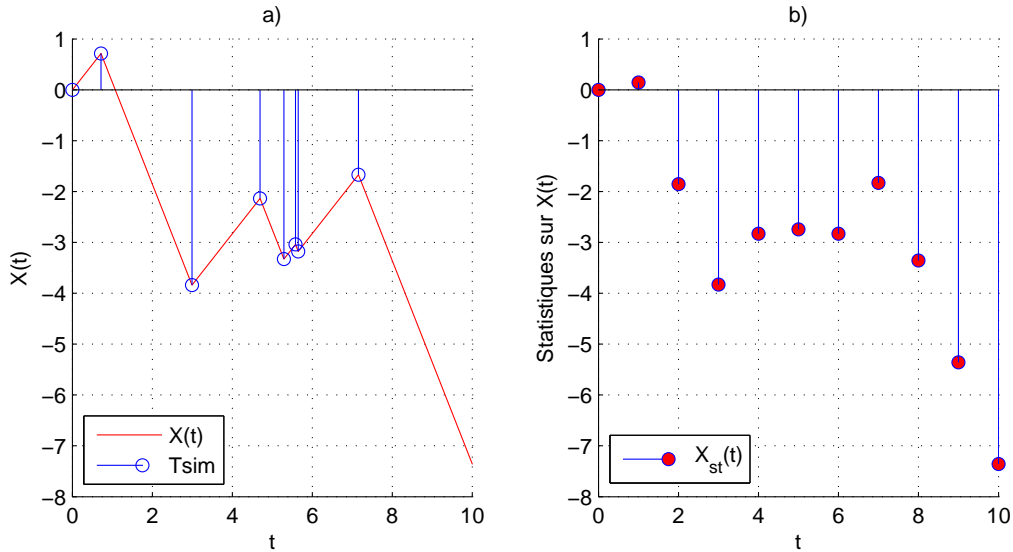


FIGURE 3.2 – a) Historique de la variable d'état $X(t)$ et des b) statistiques $X_{st}(t)$.

variable d'état (X_m), la variance de la variable d'état ($V_{X_{st}}$), l'énergie totale consommée pour appliquer le contrôle basé sur les événements durant la simulation (En_{tot}).

$$X_m = moyenne(X);$$

$$V_{X_{st}} = \sum_{i=1}^{T_f} X_{st}(i)^2 / T_f;$$

$$En_{tot} = (En_{QH} + En_{QL}) / T_f.$$

Nous pouvons suivre l'algorithme de simulation présenté ci-dessus pour le cas d'un intégrateur à commutation à deux états contrôlé, en regardant la Figure 2.5 que nous avons donnée dans le Chapitre 2. Dans la section suivante nous allons présenter quelques résultats et exemple de l'application de l'algorithme sur l'intégrateur à commutation que nous avons défini dans le chapitre précédent.

3.3 Application numérique

3.3.1 Intégrateur contrôlé versus non contrôlé

La Figure 3.3 montre la différence entre le comportement aléatoire d'un intégrateur à deux états, avec et sans le contrôle basé sur les événements, avec les paramètres suivants :

- $N_r = 1$ simulations sur une durée : $T_f = 300$,
- les taux de variation : $r_1 = 1, r_2 = -2$,

- les taux de transition entre les états : $\lambda_{12} = 0.4, \lambda_{21} = 0.6$,
- les paramètres de contrôle : $QH_1 = QH_2 = 1.5, QL_1 = QL_2 = 2.5$,
- la zone de contrôle : $[X_{min}, X_{max}] = [10, -10]$ avec
- les points d'arrêt du contrôle : $[X_L, X_H] = [5, -5]$.

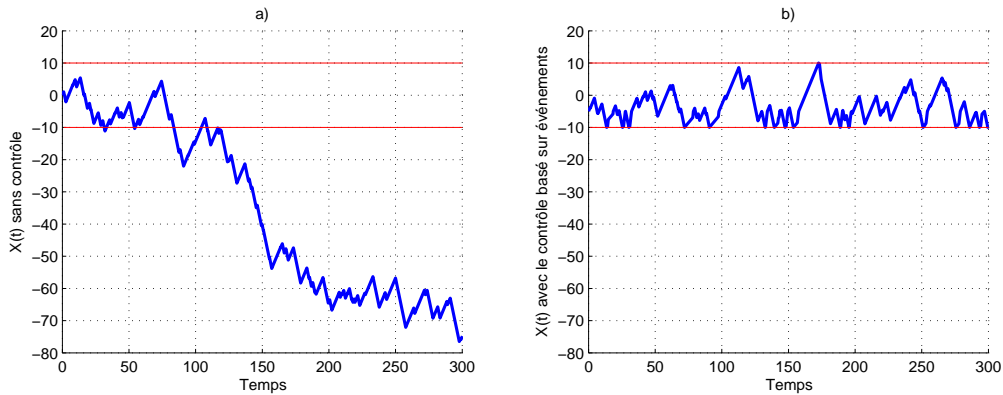


FIGURE 3.3 – Dynamique continue pour : (a) L'intégrateur à commutation non contrôlé (b) L'intégrateur à commutation avec le contrôle basé sur les événements sur $[X_{min}, X_{max}] = [10, -10]$ et $[X_L, X_H] = [5, -5]$

La Figure 3.4 représente un zoom de la partie b) de la Figure 3.3. Nous pouvons observer alors la façon dont agit le contrôle supérieur et inférieur dans leur zone respective de contrôle.

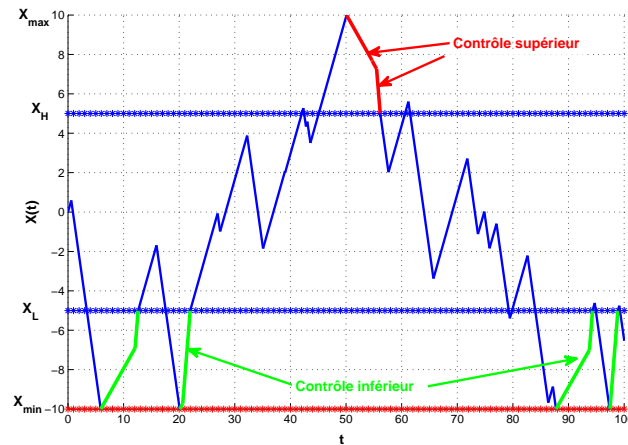


FIGURE 3.4 – Application du contrôle basé sur les événements pour l'intégrateur commuté

3.3.2 Le nombre de simulations

Dans l'exemple précédent nous avons présenté l'évolution de l'intégrateur à commutation lors d'une seule simulation. Pourtant, le caractère aléatoire du système nous mène à considérer un nombre plus grand de simulations pour lequel nous calculons les paramètres de sortie dont nous avons besoin. Cette caractéristique est représentée dans la Figure 3.5, où nous pouvons observer l'évolution du deuxième moment de performabilité (1.3.2) pour $N_r = 10$ simulations, et pour $N_r = 1000$ simulations. C'est un exemple démonstratif qui justifie le choix d'un grand nombre de simulations, N_r , que nous allons considérer pour les résultats suivants.

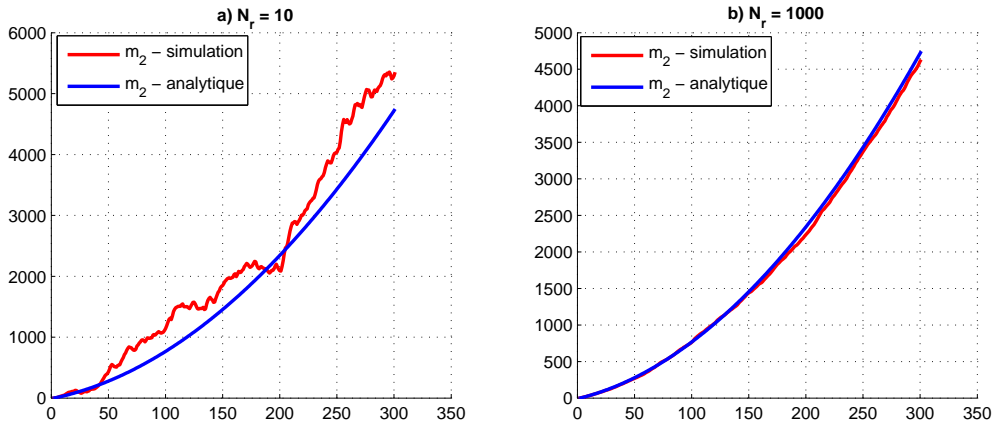


FIGURE 3.5 – Comparaison entre la simulation et la méthode analytique, pour le premier moment de performabilité : a) $N_r = 10$ b) $N_r = 1000$.

3.3.3 Critère quadratique de performance dans la simulation

Nous pouvons aussi, par la simulation, chercher les paramètres optimaux de commande, qui minimisent l'énergie consommée pour appliquer le contrôle basé sur les événements, en utilisant un coût quadratique adapté à notre système, du type :

$$J(x) = \lim_{T_f \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T_f} E \left[\int_0^{T_f} [q \cdot x^2(t) + r \cdot u^2(t)] dt \right] \right), q, r > 0. \quad (3.3.1)$$

où T_f est la durée de la simulation, $u^2(t)$ représente l'énergie consommée pour appliquer le contrôle, tandis que $E[x^2(t)]$ est le moment d'ordre 2, de la variable continue X . Nous allons construire un cas d'étude pour la méthode de simulation présentée ci-dessus, pour minimiser le coût quadratique que nous venons de définir (3.3.1).

Considérons un intégrateur à commutation à deux états ayant comme paramètres initiaux :

- les taux de variation associés aux états : $r_1 = 5, r_2 = -5$,
- les taux de transition entre les états : $\lambda_{12} = 0.4, \lambda_{21} = 0.6$, avec
- une zone de contrôle définie par : $X_{min} = -100, X_{max} = 100$.

Les $N_r = 50.000$ simulations, avec une longueur de $T_f = 5000$ (*unités de temps*) chacune, sont réalisées en Matlab 7.9.0.529, sur une machine de calcul à quatre cœurs, avec une vitesse de 3GHz et 4GB de RAM. On fait varier les paramètres de contrôle $\{QH_1, QH_2, QL_1, QL_2\}$ de sorte qu'ils respectent les conditions du contrôle basé sur les événements. En tenant compte du fait que le système contient beaucoup de paramètres qui peuvent varier, nous considérons dans un souci de simplicité que :

$$QH_1 = QH_2 \in \{5.1, 5.2, \dots, 30\} \quad QL_1 = QL_2 \in \{5.1, 5.2, \dots, 30\}$$

Nous considérons aussi différentes variations pour les limites d'arrêt du contrôle :

$$X_H \in \{0, 10, 20, 30\} \quad X_L \in \{0, -10, -20, -30\}$$

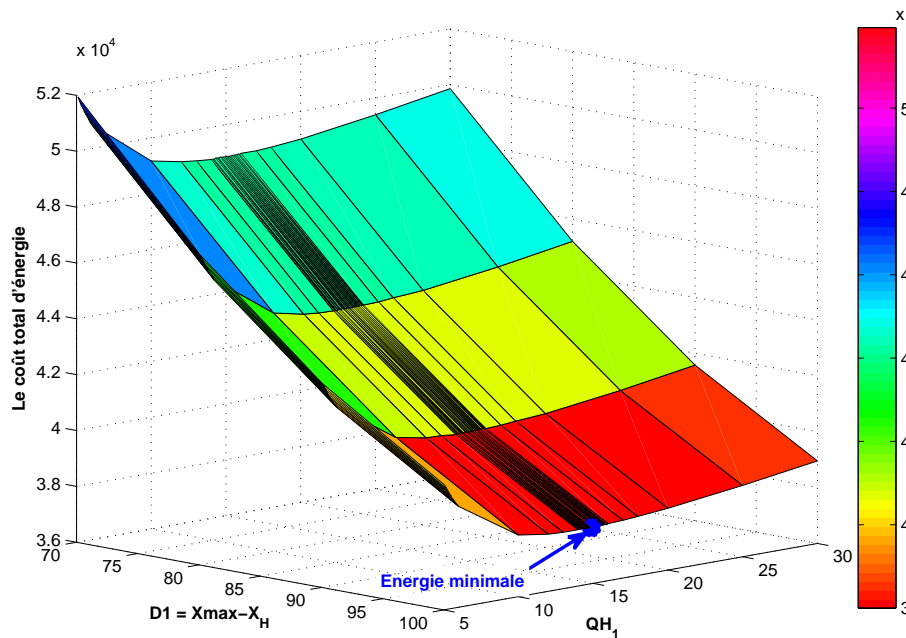


FIGURE 3.6 – Variation d'énergie pour l'intégrateur à commutation considéré.

La Figure 3.6 est une représentation graphique du coût énergétique total (3.3.1), obtenu en appliquant le contrôle basé sur les événements pour l'intégrateur à deux états (défini par les paramètres de fonctionnement définis ci-dessus). Une valeur minimale de

l'énergie est obtenue, pour le paramètre du contrôle $QH_1 = 14.9$ et la limite d'arrêt du contrôle $X_H = 0$. Une évolution similaire de l'énergie est obtenue pour les intégrateurs à commutation ayant différents taux de variation et différentes limites d'arrêt du contrôle.

Un deuxième cas d'étude a été réalisé sur un intégrateur à états multiples, cette fois-ci ayant quatre états avec des taux de variation différents associés à chaque état. Notre objectif a été donc de valider cette méthode de simulation, qui peut minimiser l'énergie consommée dans un système plus complexe (même si ce système possède seulement quatre états, la complexité de calcul et les temps de calcul grandissent nettement. Nous avons pris en considération différentes variations sur les mesures de contrôle et différentes limites d'arrêt du contrôle, afin de pouvoir analyser toutes les variations possibles du système.

Nous définissons les paramètres initiaux de ce système :

- les taux de variation : $r_1 = 7, r_2 = -4, r_3 = 5, r_4 = -2$,
- sur l'intervalle de contrôle $[X_{min}, X_{max}] = [0, 1]$ et
- avec des limites d'arrêt du contrôle qui varient dans les ensembles suivants :

$$QH_1 \in \{7.1, 7, 2, \dots, 8\}, QH_2 = QH_3 = QH_4,$$

$$QL_1 \in \{4.1, 4.2, \dots, 5\}, QL_2 = QL_3 = QL_4,$$

$$X_H \in \{0.9, 0.8, 0.7, \dots, 0.3\}, X_L \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.7\}$$

Une représentation graphique des résultats des simulations comprenant toutes les variations des paramètres est donnée dans la Figure 3.7. Le nombre des variations sur (X_H, X_L) a la signification suivante : la variation 1 sur (X_H, X_L) est représentée par la paire : $X_H = 0.9, X_L = 0.1$, la variation 2 est : $X_H = 0.9, X_L = 0.2$, etc. De la même manière le nombre de variations sur (Q_H, Q_L) est représenté par les paires : la variation 1 par $Q_H = 7.1, Q_L = 4.1$, la variation 2 par $Q_H = 7.1, Q_L = 4.2$, jusqu'à la variation 100 qui est $Q_H = 8, Q_L = 5$. Même si à un premier coup d'œil ne sont pas repérées sur la figure, les valeurs optimales qui minimise le coût quadratique (3.3.1) sont les suivantes : $X_H = 0.8, X_L = 0.4, QH = 7.2, QL = 4.8$.

3.3.4 Temps de calcul

Il est important de noter que le temps de calcul augmente d'autant plus que le système est grand, plus explicitement il augmente avec le nombre d'états. Le nombre de variations sur les paramètres de contrôle ou sur les limites X_H, X_L , influence également de manière significative la durée des simulations.

En conséquence, nous évaluons également l'adaptabilité de l'algorithme de contrôle basé sur les événements, en termes de temps de calcul, qui est déterminée par trois paramètres fondamentaux :

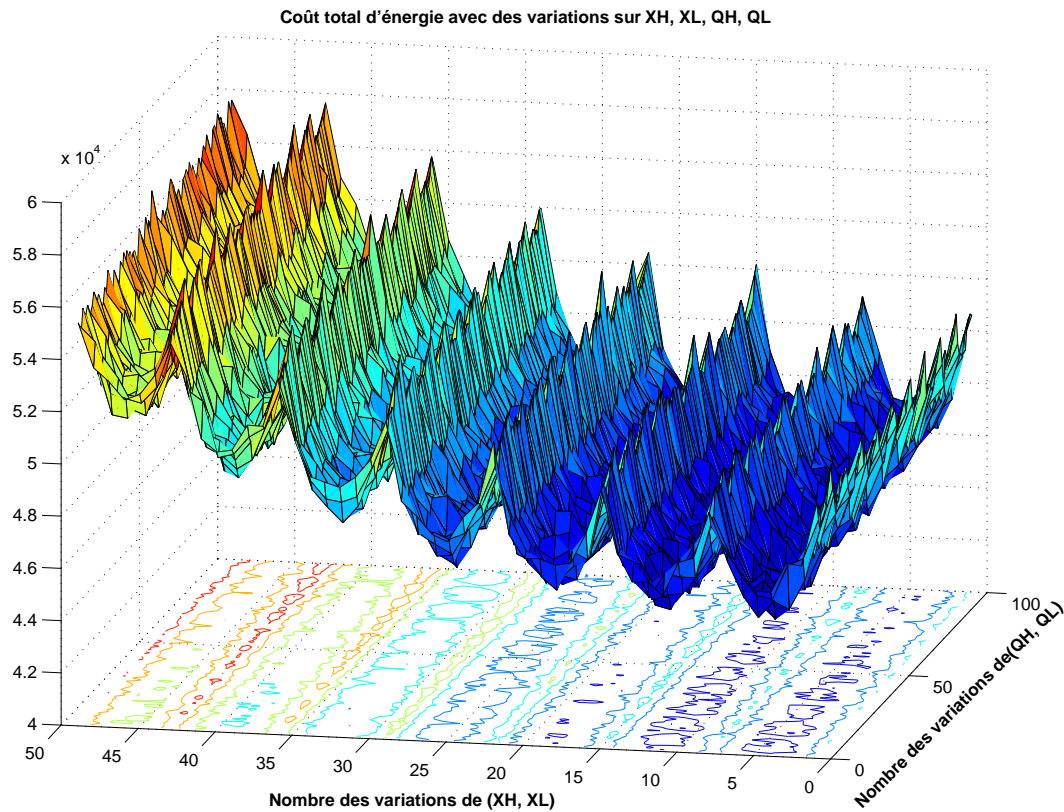


FIGURE 3.7 – Variation d'énergie pour un intégrateur commuté à quatre états.

- la longueur de la simulation (T_f)
- le nombre de simulations (N_r) et
- le nombre d'états du système (N).

Plus explicitement, nous fixons deux des paramètres ci-dessus et nous évaluons comment le temps de calcul évolue selon le troisième paramètre. Pour ce faire, les paramètres de contrôle et les frontières de contrôle ont été considérés fixes. Le Tableau 3.2 montre la durée de calcul (T_c) pour un intégrateur à commutation à deux états sur $N_r = 100$ simulations; la période statistique est $d_{st} = 1$. Dans ce cas, le temps de calcul est proportionnel à la longueur de la simulation, comme représenté dans la Figure 3.8 (dû à des échelles différentes, les graphiques sont normalisés).

Pour le même intégrateur à deux états et une longueur fixe de la simulation ($T_f = 1000$), le temps de calcul évolue de façon considérable plus le nombre de simulations augmente (voir Tableau 3.3). Quand le nombre d'états de la chaîne de Markov augmente, nous sommes dans un cas particulier qui est représenté dans le Tableau 3.4; ici la longueur de la simulation et le nombre de simulations sont fixes ($T_f = 1000$, $N_r = 1000$). Dans ce cas, bien que la durée de calcul dépende largement du nombre d'états de la chaîne de

T_f	10	50	100	1000	5000
T_c	0.45[sec]	0.54[sec]	0.63[sec]	2.57[sec]	15.22[sec]

TABLE 3.2 – Temps de calcul T_c en fonction de la longueur de la simulation T_f .

N_r	100	1000	5000	10000	50000
T_c	2.57[sec]	22.18[sec]	1.82[<i>min</i>]	3.61[<i>min</i>]	19.4[<i>min</i>]

TABLE 3.3 – Temps de calcul T_c en fonction du nombre de simulations N_r .

N	2	5	10	15	20	30
T_c	22.18[sec]	1.61[<i>min</i>]	2.7[<i>min</i>]	3.66[<i>min</i>]	4.66[<i>min</i>]	6.68[<i>min</i>]

TABLE 3.4 – Temps de calcul T_c en fonction du nombre d'états N .

Markov, il n'y a pas d'augmentation exponentielle. On peut observer l'évolution quasi-linéaire dans la Figure 3.8, qui confirme la complexité réduite de l'algorithme proposé et la possibilité de l'utiliser pour des chaînes de Markov de grande taille.

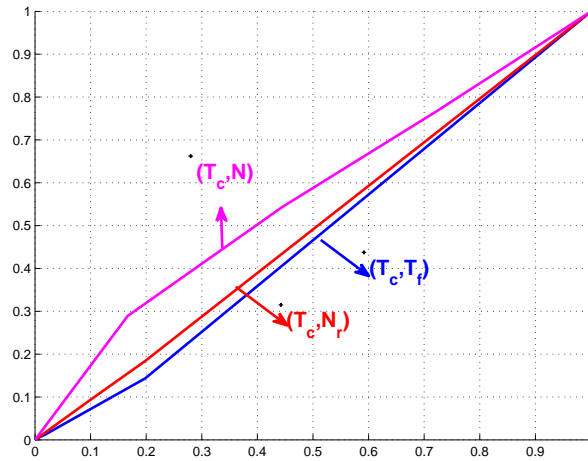


FIGURE 3.8 – T_c par rapport à T_f , N_r et N

3.4 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons présenté une méthode de simulation en temps continu pour les systèmes stochastiques à commutation. En prenant en compte les événements aléatoires qui changent le comportement du système, nous appliquons le contrôle seule-

ment quand il est nécessaire. L'algorithme peut être facilement utilisé pour les intégrateurs stochastiques à commutation à états multiples ; il peut servir comme un procédé perfectionné (comme benchmark) pour réduire au minimum l'énergie consommée par ces systèmes en appliquant le contrôle. Enfin, il peut être également utilisé comme une méthode de validation des résultats analytiques concernant les systèmes stochastiques à commutation avec le contrôle basé sur les événements. Dans le chapitre suivant nous allons présenter le modèle probabiliste que nous avons construit pour notre système défini dans le Chapitre 2. Il sera suivi dans le Chapitre 4 par des résultats numériques et des validations en utilisant la méthode de simulation que nous avons décrite dans ce chapitre.

Chapitre 4

Modèle analytique

Dans ce chapitre nous présentons le modèle probabiliste d'énergie stationnaire que nous avons construit pour le système introduit dans le Chapitre 2, sur lequel nous appliquons le contrôle basé sur les événements. Dans la Section 4.1 nous allons étudier le comportement du système dans la région de contrôle, et identifier les mesures d'énergie dont nous avons besoin. Pour calculer l'énergie consommée quand le contrôle est appliqué, nous avons besoin de déterminer : les probabilités de sortie de la région de contrôle (Section 4.2), les temps moyens de sortie de cette région (Section 4.3), les temps de sortie caractéristiques à chaque état (Section 4.4) qui vont nous aider à définir les temps de contrôle dans la Section 4.5. En sachant les probabilités et les temps de sortie, nous serons capables de formuler les expressions des énergies consommées dans la Section 4.6.

4.1 Introduction

Dans le Chapitre 2 nous avons introduit le système stochastique à commutation qui est au centre de nos études (2.2.1) avec l'objectif principal de maintenir la variable d'état dans une zone de contrôle. Afin de réaliser cet objectif par le contrôle basé sur les événements, nous avons défini un critère quadratique de performance :

$$J = E \left[\int_0^T [q \cdot x^2(t) + r \cdot u^2(t)] dt \right], q, r > 0. \quad (4.1.1)$$

où $u^2(t)$ est l'énergie consommée par le système pour appliquer le contrôle, $E[x^2(t)]$ est le moment d'ordre 2 de la variable d'état et T est la période moyenne de redémarrage. Afin de pouvoir appliquer ce critère, nous avons donc besoin de déterminer ces mesures que nous ne connaissons pas pour l'instant : $u^2(t)$, $E[x^2(t)]$ et T .

Commençons par la période de redémarrage T . Nous considérons que le système

peut passer de la zone sans contrôle $[X_L, X_H]$ vers une zone avec contrôle et vice-versa, mais jamais commuter directement entre la zone de contrôle supérieur et inférieur. Par exemple, si le système arrive à la limite maximale où le contrôle supérieur sera appliqué, il ne pourra pas commuter directement vers une zone avec le contrôle inférieur car il s'arrêtera en X_H d'abord. Cet exemple peut être aussi suivi sur la représentation stochastique hybride présentée dans la Figure 2.5 (le passage d'un état avec contrôle supérieur vers un état avec contrôle inférieur va d'abord passer par les états sans contrôle).

Périodiquement le contrôle amène le système en X_H ou X_L , d'où il reprend son évolution libre. Quatre possibilités d'évolution apparaissent, elles sont représentées dans la Figure 4.1 et correspondent aux cas suivants :

1. à partir de X_H , le système peut atteindre X_{max} dans un temps que nous notons T_1 , suivi par l'application du contrôle supérieur jusqu'à $x(t) = X_H$ pendant un temps T_2 (le premier scénario possible : PR_1 avec $\Delta_1 = X_{max} - X_H$) ;
2. à partir de X_H le système peut atteindre X_{min} dans un temps que nous notons T_3 , suivi par l'application du contrôle inférieur jusqu'à $x(t) = X_L$ pendant un temps T_4 (le deuxième scénario possible : PR_2 avec $\Delta_2 = X_H - X_{min}$) ;
3. à partir de X_L le système peut atteindre X_{min} dans un temps que nous notons T_5 , suivi par l'application du contrôle inférieur jusqu'à $x(t) = X_L$ pendant un temps T_6 (le troisième scénario possible : PR_3 avec $\Delta_3 = X_L - X_{min}$) ;
4. à partir de X_L le système peut atteindre X_{max} dans un temps que nous notons T_7 , suivi par l'application du contrôle supérieur jusqu'à $x(t) = X_H$ pendant un temps T_8 (le quatrième scénario possible : PR_4 avec $\Delta_4 = X_{max} - X_L$) ;

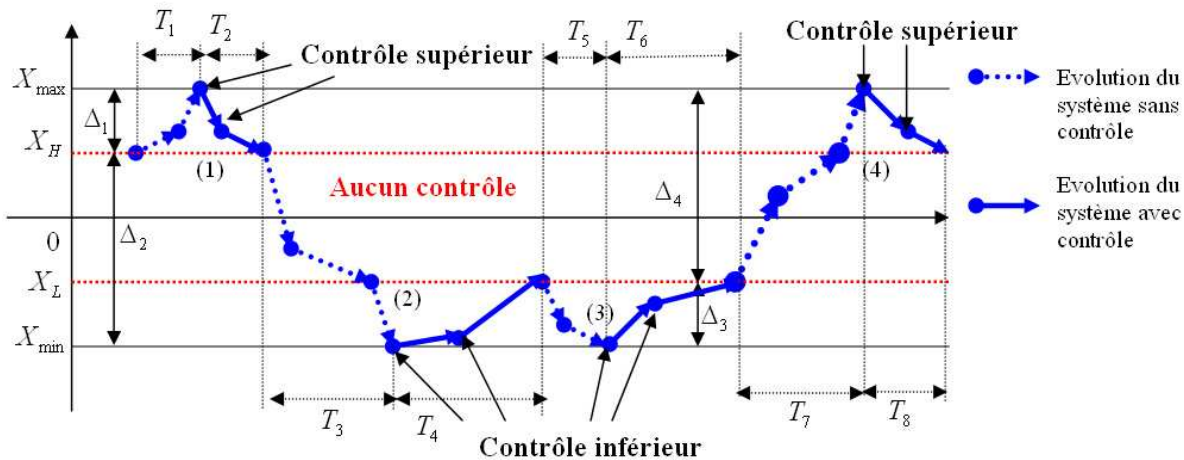


FIGURE 4.1 – Scénarios d'évolution du système à partir de X_H et X_L .

Nous avons noté par T_1, T_3, T_5, T_7 les temps de sortie vers les limites de la zone de contrôle et par T_2, T_4, T_6, T_8 les temps d'application du contrôle. En connaissant ces

temps nous pouvons ensuite déterminer la période de redémarrage T comme la somme entre le temps nécessaire pour arriver à une limite de contrôle et le temps nécessaire pour appliquer le contrôle spécifique à cette limite. En tenant compte des scénarios expliqués ci-dessus, nous avons quatre possibilités pour calculer T :

1. démarrage en X_H et arrivée à X_{max} : $T = T_1 + T_2$.
2. démarrage en X_H et arrivée à X_{min} : $T = T_3 + T_4$.
3. démarrage en X_L et arrivée à X_{min} : $T = T_5 + T_6$.
4. démarrage en X_L et arrivée à X_{max} : $T = T_7 + T_8$.

Dans ce chapitre nous allons proposer une méthode analytique pour le calcul du temps de sortie dans les Sections 4.3 - 4.4, puis pour le calcul du temps de contrôle dans la Section 4.5.

Un deuxième terme important dans le critère quadratique est le moment d'ordre 2 de la variable d'état $E[x^2(t)]$ que nous pouvons calculer à l'aide des formules définies dans le premier chapitre (Section 1.3). Soit $X_T \in [X_H, X_L]$ le *niveau cible* de la variable d'état. X_T a été choisi dans la zone sans contrôle afin de réduire la complexité du calcul mais nous n'excluons pas la possibilité que X_T soit dans tout l'intervalle de contrôle $[X_{min}, X_{max}]$. Nous pouvons alors définir la variable d'état par rapport à X_T comme :

$$K(t) = x(t) - X_T$$

En utilisant cette transformation, les espérances d'ordre 1 et 2 de $K(t)$, centrées en X_T , devient :

$$\begin{aligned} E[K(t)] &= E[x(t) - X_T] = E[x(t)] - X_T \\ E[K(t)^2] &= E[(x(t) - X_T)^2] = E[x(t)^2] - 2X_T E[x(t)] + X_T^2 \end{aligned}$$

Nous avons donc besoin de déterminer les moments de performabilité d'ordre 1 et 2 de $x(t)$ qui sont définis à l'aide des formules suivantes. Le moment d'ordre n pour un état i devient :

$$m_{n,i}(t) = E[(x(t))^n | Z(0) = i], \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (4.1.2)$$

et $\vec{m}_n(t) = [m_{n,1}, \dots, m_{n,N}]$ le vecteur des moments de performabilité d'ordre n avec $\vec{m}_0(t) = \vec{e}$ et $\vec{m}_n(0) = \vec{0}$. En appliquant le Théorème 1.4.3 pour le moment d'ordre 1 [Viswanadham et al., 1995] (qui correspond à la variable d'état moyenne de notre système) nous obtenons :

$$\frac{d\vec{m}_1(t)}{dt} = \mathbf{Q}\vec{m}_1(t) + \mathbf{R}\vec{m}_0(t) \quad \vec{m}_0(t) = \vec{e} \quad (4.1.3)$$

Nous rappelons que \mathbf{Q} est le générateur de la chaîne de Markov et que \mathbf{R} est la matrice diagonale des taux de variation. La solution de cette équation est exprimée comme :

$$\vec{m}_1(t) = e^{\mathbf{Q}(t-t_{init})} \cdot \vec{m}_1(t_{init}) + \int_{t_{init}}^t e^{\mathbf{Q}(t-\tau)} \mathbf{R} \vec{m}_0(\tau) d\tau. \quad (4.1.4)$$

et si nous calculons le moment sur la période de redémarrage T , alors $t_{init} = 0$, $T_f = T$, et la solution (4.1.4) devient :

$$\vec{m}_1(T) = e^{\mathbf{Q}T} \cdot \vec{m}_1(0) + \int_0^T e^{\mathbf{Q}(T-\tau)} \mathbf{R} \vec{e} d\tau. \quad (4.1.5)$$

puis injectée dans le calcul de l'espérance du premier moment de performabilité :

$$E[(x(t))] = \vec{p}(0)^T \vec{m}_1(T) \quad (4.1.6)$$

De la même façon, nous écrivons le Théorème 1.4.3 pour le moment de performabilité d'ordre 2 (qui correspond à la variance de X) :

$$\frac{d\vec{m}_2(t)}{dt} = \mathbf{Q} \vec{m}_2(t) + 2\mathbf{R} \vec{m}_1(t) \quad (4.1.7)$$

où $\vec{m}_1(t)$ est la solution de (4.1.3). Si nous résolvons (4.1.3) dans même manière que pour $m_1(t)$, nous obtenons la solution sur $[0, T]$:

$$\vec{m}_2(T) = e^{\mathbf{Q}T} \cdot \vec{m}_2(0) + 2 \int_0^T e^{\mathbf{Q}(T-\tau)} \mathbf{R} \vec{m}_1(\tau) d\tau. \quad (4.1.8)$$

L'espérance du deuxième moment de performabilité de l'équation (4.1.1) s'écrit alors :

$$E[(x(t))^2] = \vec{p}(0)^T \cdot \vec{m}_2(T). \quad (4.1.9)$$

Le dernier paramètre très important que nous cherchons est $u^2(t)$, l'énergie consommée par le système pour appliquer le contrôle. Les quatre scénarios représentés dans la Figure 4.1 nous permettent d'écrire l'expression de l'énergie consommée dans un état j comme :

$$En_{tot}^j = p_1^j E_1^j + p_2^j E_2^j + p_3^j E_3^j + p_4^j E_4^j. \quad (4.1.10)$$

où E_i^j , $i = 1..4$, $j = 1..N$ est l'énergie consommée en partant d'un état j quand il passe par un des scénarios PR_i décrits ci-dessus. Afin de pouvoir calculer cette énergie nous avons besoin de calculer les probabilités $(p_1^j, p_2^j, p_3^j, p_4^j)$ en suivant la méthode que nous allons proposer dans la section suivante.

Avant d'entrer dans les détails analytiques, nous définissons de manière générale ce type de probabilités qui portent souvent dans la littérature le nom de *probabilités de sortie* :

Définition 4.1.1. Si $\{Z_n\}$ est une chaîne de Markov en temps continu et B un sous-ensemble de l'espace d'états, alors la probabilité de sortie $\pi_{sortie}^j(x)$ est la probabilité que le système arrive en B en partant d'un état j :

$$\pi_{sortie}^j(x) = Prob\{x \in B | x(0) = x, Z(0) = j\}. \quad (4.1.11)$$

Dans notre cas, B est exprimé comme : $B = (-\infty, X_{min}] \cup [X_{max}, \infty)$. Dans la section suivante nous allons étudier ce type de probabilité pour lequel nous proposons une méthode analytique de calcul.

4.2 Probabilités de sortie

Cette section est réservée au calcul des probabilités $(p_1^j, p_2^j, p_3^j, p_4^j)$ que nous utilisons pour calculer l'énergie totale consommée par le système (4.1.10). En regardant la Figure 4.1 nous pouvons remarquer que le système peut démarrer soit en X_H , soit en X_L et connaître une évolution complètement arbitraire à partir de ces points. Nous utilisons les notations :

- $p_{X_H X_{max}}^j$ pour la probabilité d'arriver à X_{max} sachant que le niveau initial est X_H et l'état de départ j .
- $p_{X_H X_{min}}^j$ pour la probabilité d'arriver à X_{min} sachant que le niveau initial est X_H et l'état de départ j .
- $p_{X_L X_{min}}^j$ pour la probabilité d'arriver à X_{min} sachant que le niveau initial est X_L et l'état de départ j .
- $p_{X_L X_{max}}^j$ pour la probabilité d'arriver à X_{max} sachant que le niveau initial est X_L et l'état de départ j .

Soient P_H^j et $P_L^j = 1 - P_H^j$ les probabilités que le système démarre en X_H , respectivement en X_L , avec la possibilité d'atteindre n'importe quelles limites, et qui sont représentées de manière symbolique dans la Figure 4.2. Nous pouvons donc exprimer :

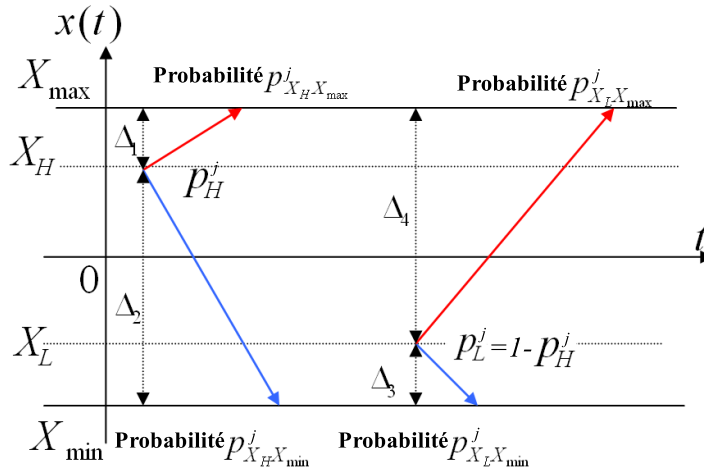
$$p_1^j = p_H^j p_{X_H X_{max}}^j \quad (4.2.1)$$

$$p_2^j = p_H^j p_{X_H X_{min}}^j \quad (4.2.2)$$

$$p_3^j = p_L^j p_{X_L X_{min}}^j \quad (4.2.3)$$

$$p_4^j = p_L^j p_{X_L X_{max}}^j \quad (4.2.4)$$

Dans ce cas, la probabilité p_1^j correspond par exemple à l'événement "le système démarre en X_H dans un état j , avec la probabilité P_H^j , et arrive à X_{max} , p_2^j à l'événement


 FIGURE 4.2 – Probabilités de sortie à partir de X_H et X_L .

“le système démarre en X_H , dans un état j , avec la probabilité p_H^j , et arrive à X_{min} ”, etc.

Prenons la probabilité p_1^j . Remarquons qu’à chaque redémarrage, l’événement “le système démarre en X_H avec la probabilité p_H^j ”, est équivalent à l’événement “la dernière fois le système a démarré soit en X_H soit en X_L , et est arrivé à X_{max} ” qui a la probabilité : $p_H^j p_{X_H X_{max}}^j + p_L^j p_{X_L X_{max}}^j$. Avec la condition $p_H^j + p_L^j = 1$ nous obtenons les deux probabilités p_H^j et p_L^j :

$$p_H^j = \frac{p_{X_L X_{max}}^j}{p_{X_L X_{max}}^j + p_{X_H X_{min}}^j} \quad (4.2.5)$$

$$p_L^j = \frac{p_{X_H X_{min}}^j}{p_{X_L X_{max}}^j + p_{X_H X_{min}}^j} \quad (4.2.6)$$

Dans ce cas, les probabilités $p_1^j, p_2^j, p_3^j, p_4^j$ (4.2.1) - (4.2.4) deviennent :

$$p_1^j = \frac{p_{X_L X_{max}}^j p_{X_H X_{max}}^j}{p_{X_L X_{max}}^j + p_{X_H X_{min}}^j} \quad (4.2.7)$$

$$p_2^j = \frac{p_{X_L X_{max}}^j p_{X_H X_{min}}^j}{p_{X_L X_{max}}^j + p_{X_H X_{min}}^j} \quad (4.2.8)$$

$$p_3^j = \frac{p_{X_H X_{min}}^j p_{X_L X_{min}}^j}{p_{X_L X_{max}}^j + p_{X_H X_{min}}^j} \quad (4.2.9)$$

$$p_4^j = \frac{p_{X_H X_{min}}^j p_{X_L X_{max}}^j}{p_{X_L X_{max}}^j + p_{X_H X_{min}}^j} \quad (4.2.10)$$

Donc, afin de déterminer les probabilités (4.2.7) - (4.2.10), nous avons d'abord besoin de déterminer les probabilités $p_{X_H X_{max}}^j, p_{X_H X_{min}}^j, p_{X_L X_{min}}^j$ et $p_{X_L X_{max}}^j$. Dans cette section, nous utilisons les notations suivantes, en partant de X_H :

$$\pi_{up}^j(XH) = P_{X_H X_{max}}^j \quad (4.2.11)$$

$$\pi_{dw}^j(XH) = P_{X_H X_{min}}^j \quad (4.2.12)$$

ou en partant de X_L :

$$\pi_{up}^j(XL) = P_{X_L X_{max}}^j \quad (4.2.13)$$

$$\pi_{dw}^j(XL) = P_{X_L X_{min}}^j \quad (4.2.14)$$

La méthode analytique que nous avons développée est basée sur une méthode de calcul des temps de sortie dont une particule a besoin pour sortir d'une zone de contrôle avec deux limites absorbantes, présentée en [Gardiner, 2004]. La première étape consiste à calculer les probabilités de sortie vers une limite. En [Gardiner, 2004] il est montré que la probabilité de sortie vers une limite imposée vérifie une équation *Kolmogorov-arrière* avec des conditions sur les frontières. Étant donné que notre intégrateur commuté est un système stochastique aux états multiples, caractérisé par une chaîne de Markov avec des taux différents associés à chaque état, des systèmes d'équations *Kolmogorov-arrière équivalentes* doivent être utilisés que nous allons construire dans la suite.

Considérons l'équation (1.4.28) que nous adaptions pour le système stochastique à commutation que nous avons considéré, plus spécifique pour le calcul des probabilités d'atteindre la limite maximale :

$$\mathbf{R} \cdot \frac{d\vec{\pi}_{up}(x)}{dx} + \mathbf{Q}^T \cdot \vec{\pi}_{up}(x) = 0 \quad (4.2.15)$$

où \mathbf{R} est la matrice diagonale des taux de variation associés à chaque état :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & r_N \end{pmatrix},$$

\mathbf{Q} est la matrice de taux de transitions définie en (1.4.10), et $\vec{\pi}_{up}(x)$, le vecteur colonne de probabilités défini par :

$$\vec{\pi}_{up}(x) = \left[\pi_{up}^1(x) \quad \pi_{up}^2(x) \quad \dots \quad \pi_{up}^N(x) \right]^T$$

où $\pi_{up}^j(x)$ est la *probabilité d'arriver à la limite maximale en partant d'un état j et de x* , définie comme :

$$\pi_{up}^j(x) = Prob\{x \geq X_{max} | x(0) = x, Z(0) = j\} \quad (4.2.16)$$

Cette manière de définir les probabilités de sortie vers la limite maximale peut également être appliquée pour les probabilités de sortie vers la limite minimale :

$$\mathbf{R} \cdot \frac{d\vec{\pi}_{dw}(x)}{dx} + \mathbf{Q}^T \cdot \vec{\pi}_{dw}(x) = 0 \quad (4.2.17)$$

où $\vec{\pi}_{dw}(x)$ est le vecteur colonne de *probabilités de sortie* ($\pi_{dw}^j(x)$) *vers la limite minimale en partant d'un état j et de x* :

$$\vec{\pi}_{dw}(x) = \left[\pi_{dw}^1(x) \quad \pi_{dw}^2(x) \quad \dots \quad \pi_{dw}^N(x) \right]^T$$

$$\pi_{dw}^j(x) = Prob\{x \leq X_{min} | x(0) = x_0, Z(0) = j\}$$

Les conditions sur les frontières seront donc analysées à partir des définitions des probabilités présentées ci-dessus :

$$\pi_{up}^j(X_{min}) = Prob\{x(t) \geq X_{max} | x(0) = X_{min}, Z(0) = j\}$$

$$\pi_{dw}^j(X_{max}) = Prob\{x(t) \leq X_{min} | x(0) = X_{max}, Z(0) = j\}$$

qui dépendent des taux (r_j) associés à chaque état $j \in \{1..N\}$:

$$a) \quad \pi_{up}^j(X_{min}) = 0 \quad si \quad r_j < 0 \quad (4.2.18)$$

$$b) \quad \pi_{up}^j(X_{max}) = 1 \quad si \quad r_j > 0 \quad (4.2.19)$$

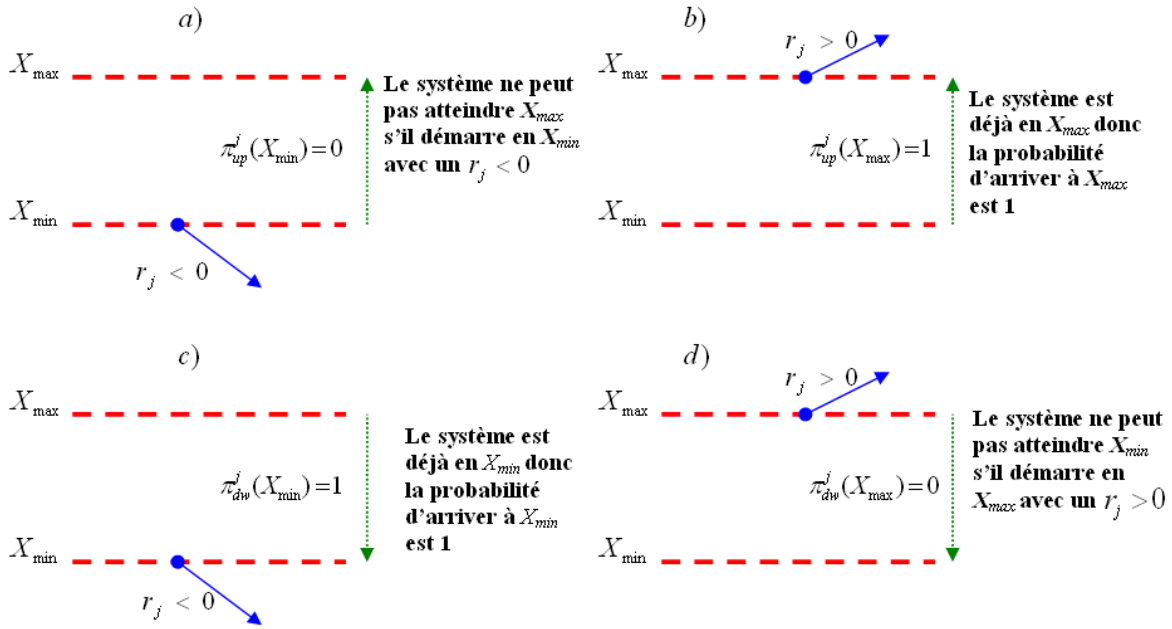
$$c) \quad \pi_{dw}^j(X_{min}) = 1 \quad si \quad r_j < 0 \quad (4.2.20)$$

$$d) \quad \pi_{dw}^j(X_{max}) = 0 \quad si \quad r_j > 0 \quad (4.2.21)$$

Ces dernières équations représentent les conditions aux limites pour les probabilités de sortie qui peuvent être suivies sur la Figure 4.3 où chaque cas correspond à une condition (5.2.3) - (5.2.6).

Si par exemple le point de départ du système est en X_{min} avec un taux de variation négatif, alors il est clair que la probabilité pour arriver à X_{max} est zéro. Si le système démarre en X_{max} avec un taux de variation positif, alors la probabilité d'arriver à X_{max} est 1 car le système est déjà à la limite maximale. De la même manière il est aisé d'expliquer les conditions sur les probabilités d'arriver à la limite minimale quand on démarre directement en X_{min} , ou en X_{max} .

Les solutions des équations (4.2.15) et (4.2.17), en considérant les conditions aux limites (5.2.3) - (5.2.6), sont :


 FIGURE 4.3 – Conditions aux limites pour les probabilités de sortie $\pi_{up}^j(x)$ et $\pi_{dw}^j(x)$.

$$\vec{\pi}_{up}(x) = e^{-\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot (x - X_{min})} \cdot \vec{\pi}_{up}(X_{min}) \quad (4.2.22)$$

$$\vec{\pi}_{dw}(x) = e^{-\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot (x - X_{min})} \cdot \vec{\pi}_{dw}(X_{min}) \quad (4.2.23)$$

En conclusion, ces solutions nous permettent de calculer :

- les probabilités d’atteindre X_{min} ou X_{max} que nous avons défini en début de cette section (4.2.11) - (4.2.14),
- les probabilités p_H^j et P_L^j (4.2.5)-(4.2.6), et finalement
- les probabilités $(p_1^j, p_2^j, p_3^j, p_4^j)$ dont nous avons besoin pour l’énergies (4.2.1) - (4.2.4).

Une fois ces probabilités connues, nous pouvons déterminer ensuite les temps de séjour (temps moyens de sortie) nécessaires pour atteindre les limites.

4.3 Temps moyens de sortie

Dans beaucoup d’applications stochastiques, prédire l’instant où le système arrive à une certaine limite de performance ou encore, l’instant où certaines parties du processus doivent arrêter de fonctionner, devient une procédure complexe qui doit prendre en considération l’aspect aléatoire du système et les caractéristiques de commutation. Dans la littérature la notion de *temps de sortie* est souvent utilisée dans la finance (par exemple déterminer l’instant où il faut vendre ou acheter des actions) ([Masoliver et al., 2005],

[Montero et al., 2005]), dans l'industrie manufacturière (savoir quand arrêter la production si le niveau de performabilité est atteint [Rao & Swift, 2006]), et aussi dans des processus de diffusion ou pour des processus avec un mouvement brownien (savoir quand une particule doit quitter un intervalle [Lefebvre, 2011]). Les méthodes numériques pour des équations stochastiques différentielles sont relativement compliquées et parfois inefficaces quand il s'agit de réaliser l'approximation des temps moyens de sortie [Higham et al., 2011], mais des progrès dans ce sens ont été réalisés dans le travail de [Brandejsky et al., 2012], qui utilise une méthode numérique pour calculer les temps moyens de sortie pour un processus de Markov déterministe par morceaux. Leur approche est basée sur une quantification de la chaîne de Markov discrète caractéristique au processus et qui est complétée par un exemple académique qui exemplifie la méthode.

Nous pouvons définir le temps de sortie d'une manière générale comme :

Définition 4.3.1. *Si $\{Z_n\}$ est une chaîne de Markov en temps continu et B un sous-ensemble de l'espace d'état, alors le temps de sortie vers B , en partant d'un état j est :*

$$T_{sortie}^j(x) = \inf\{t > 0 | x(t) \in B, x(0) = x, Z(0) = j\} \quad (4.3.1)$$

Dans notre cas, $B = (-\infty, X_{min}] \cup [X_{max}, \infty)$. En retournant à notre modèle d'intégrateur stochastique à commutation à états multiples, nous pouvons à présent continuer le raisonnement des probabilités de sortie afin de déterminer les temps moyens de sortie de la région de contrôle du système [Gardiner, 2004]. Si nous adaptons l'équation Kolmogorov-arrière pour calculer les temps de sortie de la zone de contrôle vers X_{max} nous avons :

$$\mathbf{R} \cdot \frac{d\vec{\gamma}_{up}(x)}{dx} + \mathbf{Q}^T \cdot \vec{\gamma}_{up}(x) + \vec{\pi}_{up}(x) = 0 \quad (4.3.2)$$

où $\vec{\pi}_{up}(x)$ est le vecteur colonne de probabilités de sortie que nous avons obtenu dans la section précédente (4.2.22), \mathbf{R} et \mathbf{Q} sont les matrices de taux de variation, respectivement de taux de transition, et $\vec{\gamma}_{up}(x)$ le vecteur colonne de fonctions suivantes :

$$\vec{\gamma}_{up}(x) = \left[\begin{array}{cccc} \gamma_{up}^1(x) & \gamma_{up}^2(x) & \dots & \gamma_{up}^N(x) \end{array} \right]^T$$

où $\gamma_{up}^j(x)$ est une fonction qui caractérise le couple "temps de sortie - probabilité de sortie" vers X_{max} en fonction du point de départ x et de l'état initial j . $\gamma_{up}^j(x)$ s'exprime en utilisant les probabilités de sortie (4.2.22) :

$$\gamma_{up}^j(x) = \pi_{up}^j(x) \cdot T_{up}^j(x) \quad (4.3.3)$$

Le même raisonnement peut être appliqué pour les *fonctions qui caractérisent le couple "temps de sortie - probabilité de sortie" vers X_{min} en fonction du point de départ x et de l'état initial j* :

$$\mathbf{R} \cdot \frac{d\vec{\gamma}_{dw}(x)}{dx} + \mathbf{Q}^T \cdot \vec{\gamma}_{dw}(x) + \vec{\pi}_{dw}(x) = 0 \quad (4.3.4)$$

où $\vec{\pi}_{dw}(x)$ est le vecteur colonne de probabilités de sortie que nous avons obtenu dans la section précédente (4.2.23) et $\vec{\gamma}_{dw}(x)$ le vecteur colonne de fonctions suivant :

$$\vec{\gamma}_{dw}(x) = \left[\begin{array}{cccc} \gamma_{dw}^1(x) & \gamma_{dw}^2(x) & \dots & \gamma_{dw}^N(x) \end{array} \right]^T$$

où $\gamma_{dw}^j(x)$ est exprimé comme :

$$\gamma_{up}^j(x) = \pi_{up}^j(x) \cdot T_{up}^j(x) \quad (4.3.5)$$

Compte tenu des relations (4.3.3) et (4.3.5), les solutions de (4.3.2) et (4.3.4) satisfont les conditions aux limites suivantes :

$$\gamma_{up}^j(X_{min}) = \gamma_{dw}^j(X_{min}) = 0, \text{ si } r_j < 0 \quad (4.3.6)$$

$$\gamma_{up}^j(X_{max}) = \gamma_{dw}^j(X_{max}) = 0, \text{ si } r_j > 0 \quad (4.3.7)$$

car, par exemple, la probabilité de sortie vers X_{max} en partant de X_{min} dans un état ayant un taux de variation négatif est zéro. Aussi, la probabilité de sortie vers X_{min} en partant de X_{max} dans un état avec un taux de variation positif est zéro.

Si nous multiplions, par exemple à gauche, l'équation (4.3.2) avec $e^{\int_{X_{min}}^x (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T)dx} \mathbf{R}^{-1}$ alors l'équation devient :

$$e^{\int_{X_{min}}^x (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T)dx} \left(\frac{d\vec{\gamma}_{up}(x)}{dx} \right) + e^{\int_{X_{min}}^x (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T)dx} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \vec{\gamma}_{up}(x) + e^{\int_{X_{min}}^x (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T)dx} \mathbf{R}^{-1} \vec{\pi}_{up}(x) = 0.$$

Mais sachant que :

$$e^{\int_{X_{min}}^x (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T)dx} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T e^{\int_{X_{min}}^x (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T)dx}$$

nous obtenons :

$$\frac{d}{dx} \left[e^{\int_{X_{min}}^x (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T)dx} \vec{\gamma}_{up}(x) \right] = -e^{\int_{X_{min}}^x (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T)dx} \mathbf{R}^{-1} \vec{\pi}_{up}(x) \quad (4.3.8)$$

Soit $\mathbf{W} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T$. La solution de l'équation (4.3.8) avec les conditions aux limites (4.3.6)-(4.3.7) est :

$$\vec{\gamma}_{up}(x) = e^{\mathbf{W}(x-X_{min})} \vec{\gamma}_{up}(X_{min}) - \int_{X_{min}}^x e^{\mathbf{W}(x-\tau)} \mathbf{R}^{-1} \cdot \vec{\pi}_{up}(\tau) d\tau \quad (4.3.9)$$

De la même façon, la solution de l'équation (4.3.4) est :

$$\vec{\gamma}_{dw}(x) = e^{\mathbf{W}(x-X_{min})}\vec{\gamma}_{dw}(X_{min}) - \int_{X_{min}}^x e^{\mathbf{W}(x-\tau)}\mathbf{R}^{-1} \cdot \vec{\pi}_{dw}(\tau)d\tau \quad (4.3.10)$$

Une fois que nous avons obtenu $\vec{\gamma}_{up}(x)$ et $\vec{\gamma}_{dw}(x)$, nous pouvons calculer les temps moyens de sortie vers la limite maximale ou minimale en partant de l'état j :

$$T_{up}^j(x) = \frac{\gamma_{up}^j(x)}{\pi_{up}^j(x)} \quad (4.3.11)$$

$$T_{dw}^j(x) = \frac{\gamma_{dw}^j(x)}{\pi_{dw}^j(x)} \quad (4.3.12)$$

Pour comprendre la signification exacte de ces temps, nous retournons à l'exemple d'automate stochastique hybride que nous avons fourni pour l'intégrateur commuté avec deux états et le contrôle basé sur les événements (Figure 2.5). En suivant l'évolution de l'automate nous allons observer les temps suivants (deux exemples sont représentés dans la Figure 4.4) :

$T_{up}^1(x)$ le temps moyen de sortie vers X_{max} en partant de l'état 1 (plus spécifiquement c'est le temps moyen passé dans la chaîne de Markov à deux états avant d'arriver à la limite maximale avec l'état initial 1 ; cf. Figure 4.4 a)).

$T_{up}^2(x)$ le temps moyen de sortie vers X_{max} en partant de l'état 2 (temps moyen passé dans la chaîne de Markov avant d'arriver à la limite maximale avec l'état initial 2).

$T_{dw}^1(x)$ le temps moyen de sortie vers X_{min} en partant de l'état 1 (temps moyen passé dans la chaîne de Markov avant d'arriver à la limite minimale avec l'état initial 1).

$T_{dw}^2(x)$ le temps moyen de sortie vers X_{min} en partant de l'état 2 (temps moyen passé dans la chaîne de Markov avant d'arriver à la limite minimale avec l'état initial 2 ; cf. Figure 4.4 b)).

De retour sur les quatre scénarios considérés dans la Figure 4.1, nous savons à présent calculer :

– le temps de sortie de la zone de contrôle en partant de XH (Figure 4.5 a)) :

$$T_1^j = T_{up}^j(XH) \quad (4.3.13)$$

$$T_3^j = T_{dw}^j(XH) \quad (4.3.14)$$

– le temps de sortie de la zone de contrôle en partant de XL (Figure 4.5 b)) :

$$T_5^j = T_{dw}^j(XL) \quad (4.3.15)$$

$$T_7^j = T_{up}^j(XL) \quad (4.3.16)$$

Ces temps seront utilisés pour calculer les énergies de contrôle que nous allons introduire dans la Section 4.6.

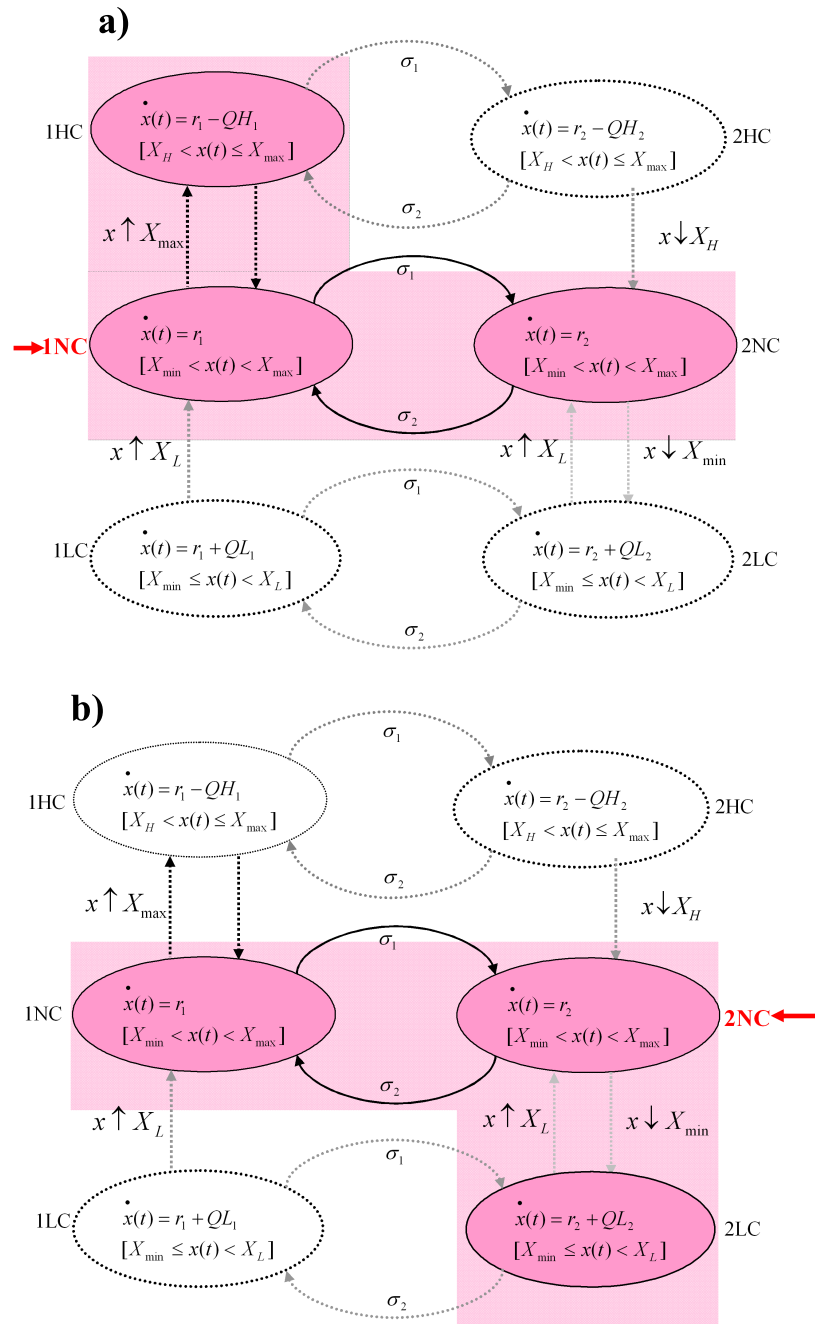
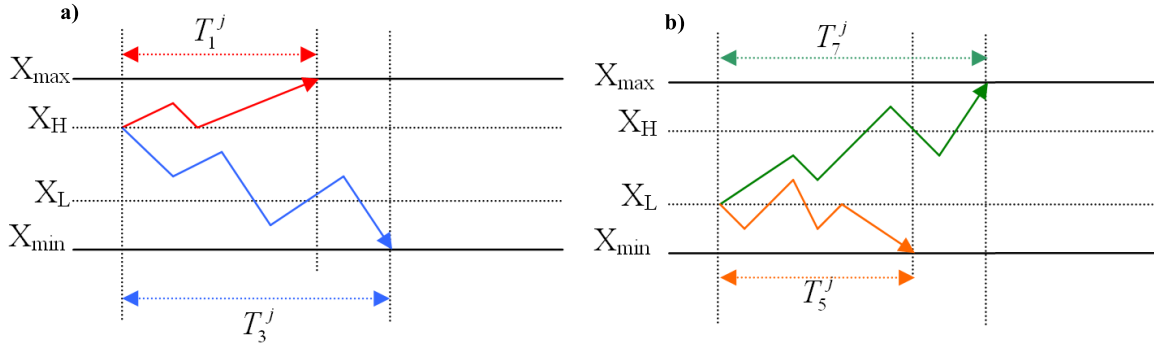


FIGURE 4.4 – a) Le temps moyen de sortie vers X_{max} en partant de l'état 1 : $T_{1up}(x)$, b) Le temps moyen de sortie vers X_{min} en partant de l'état 2 : $T_{2dw}(x)$


 FIGURE 4.5 – a) Temps moyens de sortie T_1, T_3 b) Temps moyen de sortie T_5, T_7

4.4 Temps moyens de sortie caractéristiques à chaque état

Dans la section précédente nous avons déterminé les temps moyens passés dans la chaîne de Markov avant d'arriver soit à X_{max} soit X_{min} . Parfois il est aussi nécessaire de savoir calculer le temps moyen que la chaîne de Markov passe dans un certain état avant d'arriver aux limites. Pour cet aspect nous avons réalisé une méthode de calcul qui suit [Gardiner, 2004].

Soit $G_j(x, t)$ (la fonction de distribution cumulative) pour un état j qui correspond à la probabilité que le système sortira de la zone de contrôle en un temps T :

$$G_j(x, t) = Prob_j(T \geq t) \quad (4.4.1)$$

Alors le vecteur colonne de probabilités de sortie $\vec{G}(x, t) = [G_j(x, t)]_{j=N,1}$ respecte les conditions suivantes sur les frontières :

$$\vec{G}(x, t) = \begin{cases} \vec{p}_0, & X_{min} \leq x \leq X_{max} \\ \vec{0}, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (4.4.2)$$

où \vec{p}_0 est le vecteur colonne de probabilités stationnaires (1.4.14). L'équation (4.4.1) nous permet de définir le *temps moyen de sortie de la zone de contrôle* $T_j(x)$ (ou le temps de séjour dans un état j) qui est donné par la relation :

$$T_j(x) = \int_0^\infty G_j(x, t) dt. \quad (4.4.3)$$

Si nous écrivons les équations (1.4.28) pour $G(x, t)$:

$$\frac{\partial \vec{G}(x, t)}{\partial t} = \mathbf{R} \frac{\partial \vec{G}(x, t)}{\partial x} + \mathbf{Q}^T \vec{G}(x, t) \quad (4.4.4)$$

$$\vec{G}(0, t) = \vec{0}, \quad t \geq 0 \quad (4.4.5)$$

et $\vec{G}(x, 0)$ respecte la relation (4.4.2), alors nous pouvons intégrer (4.4.4) sur $(0, \infty)$ et nous obtenons :

$$\int_0^\infty \frac{\partial \vec{G}(x, t)}{\partial t} dt = \int_0^\infty \mathbf{R} \frac{\partial \vec{G}(x, t)}{\partial x} dt + \int_0^\infty \mathbf{Q}^T \vec{G}(x, t) dt \Leftrightarrow$$

$$\vec{G}(x, \infty) - \vec{G}(x, 0) = \mathbf{R} \frac{\partial \vec{T}(x)}{\partial x} + \mathbf{Q}^T \vec{T}(x) \Leftrightarrow$$

qui est équivalent à l'équation suivante que nous allons utiliser pour le calcul des temps de sortie :

$$\mathbf{R} \frac{d\vec{T}(x)}{dx} + \mathbf{Q}^T \vec{T}(x) + \vec{p}_0 = 0. \quad (4.4.6)$$

où $\vec{T}(x)$ est le vecteur colonne :

$$\vec{T}(x) = [T_1(x) \quad T_2(x) \quad \dots \quad T_N(x)]^T.$$

et $T_j(x)$ représente le **temps moyen que la chaîne de Markov passe dans un état j avant de quitter la zone de contrôle (soit par X_{min} soit par X_{max}) indépendamment de l'état de départ.** Il respecte aussi les conditions aux limites suivantes :

$$T_j(X_{max}) = 0 \quad \text{si} \quad r_j > 0$$

$$T_j(X_{min}) = 0 \quad \text{si} \quad r_j < 0$$

Ces conditions aux limites sont faciles à comprendre en suivant la Figure 4.6 où, par exemple, le temps de sortie soit vers X_{min} , soit vers X_{max} quand le système démarre déjà en X_{max} dans un état avec $r_j > 0$ est zéro car le système est déjà en X_{max} .

La somme des $T_j(x)$ va nous donner le **temps moyen total** que le système a passé dans la chaîne de Markov avant d'arriver soit à X_{max} soit X_{min} , indépendamment de l'état de départ :

$$T_{tot}(x) = \sum_j T_j(x). \quad (4.4.7)$$

Pour avoir la solution analytique de l'équation (4.4.6) nous pouvons appliquer une méthode similaire à celle employée pour les équations (4.3.2) - (4.3.4). En multipliant (4.4.6) avec $e^{\int_{X_{min}}^x \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T dx} \mathbf{R}^{-1}$, nous obtenons :

$$\vec{T}(x) = e^{\mathbf{W}(x-X_{min})} \vec{T}(X_{min}) - \int_{X_{min}}^x e^{\mathbf{W}(x-\tau)} \mathbf{R}^{-1} \vec{p}_0 d\tau \quad (4.4.8)$$

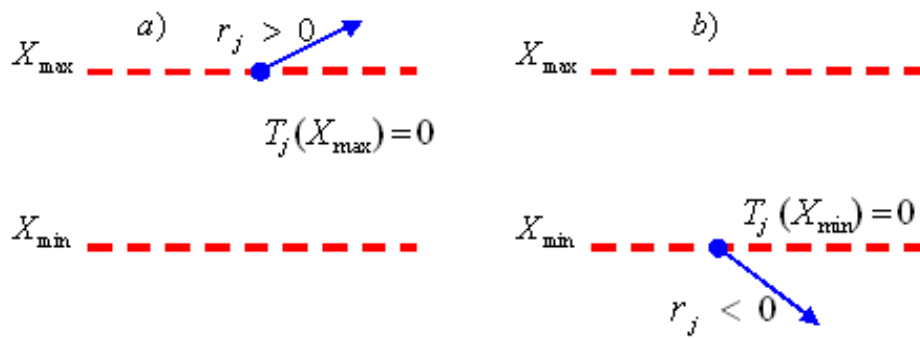


FIGURE 4.6 – a) Le temps moyen de sortie $T_j(X_{max})$ b) Le temps moyen de sortie $T_j(X_{min})$

avec $\mathbf{W} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T$. Une représentation graphique symbolique de ce temps moyen total de sortie (4.4.7) pour l'intégrateur commuté à deux états est donnée dans la Figure 4.7.

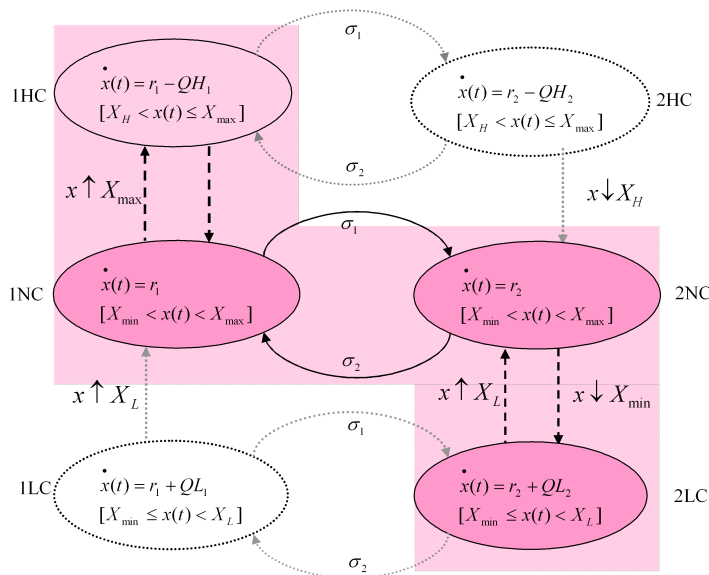


FIGURE 4.7 – Le temps moyen total passé dans la chaîne de Markov avant d'arriver aux limites.

4.5 Temps de contrôle

Une fois la méthode de calcul des temps de sortie mise en place, nous pouvons à présent calculer les temps pendant lesquels le contrôle est appliqué. Si nous regardons la Figure 4.1, nous observons que :

- $T_2 = T_8$ sont les temps durant lesquels le contrôle supérieur est appliqué (entre X_{max} et X_H).
- $T_4 = T_6$ sont les temps durant lesquels le contrôle supérieur est appliqué (entre X_{min} et X_L).

De la même manière que dans la section précédente, les temps de contrôle peuvent être vus comme des temps de sortie mais d'une autre région, par exemple T_2 le temps de sortie de la zone de contrôle supérieur $[X_H, X_{max}]$ et T_4 le temps de sortie de la zone de contrôle inférieur $[X_{min}, X_L]$. Nous pouvons adapter la méthode de calcul de la Section 4.4 mais avec quelques observations supplémentaires :

1. Cette fois la matrice \mathbf{R} n'est plus la matrice des taux de variation simples, mais la matrice diagonale des taux de variation avec contrôle appliqué, tel que $r_j - QH_j < 0$ (contrôle supérieur) et $r_j + QL_j > 0$ (contrôle inférieur). En conséquence nous allons utiliser les matrices diagonales suivantes :
 - Dans la zone de contrôle supérieur $[X_H, X_{max}]$ la matrice R_s est :

$$\mathbf{R}_s = \begin{pmatrix} r_1 - QH_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 - QH_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_N - QH_N \end{pmatrix} \quad (4.5.1)$$

- Dans la zone de contrôle inférieur $[X_{min}, X_L]$ la matrice R_i est :

$$\mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} r_1 + QL_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 + QL_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_N + QL_N \end{pmatrix} \quad (4.5.2)$$

2. Les conditions aux limites seront donc concentrées sur les nouvelles régions de contrôle :

$$T_j(X_H) = 0, \quad si \quad x(t) \in [X_H, X_{max}] \quad (4.5.3)$$

$$T_j(X_L) = 0, \quad si \quad x(t) \in [X_{min}, X_L] \quad (4.5.4)$$

3. Compte tenu des hypothèses initiales que nous avons établi pour l'intégrateur commuté, le système ne peut pas arriver à la limite maximale que dans un état j ayant un taux de variation positif ($r_j > 0$) et à la limite minimale dans un état ayant un taux de variation négatif ($r_j < 0$). Compte tenu aussi du caractère aléatoire, le système peut arriver par exemple à X_{max} dans n'importe quel état j avec ($r_j > 0$), et à X_{min} dans n'importe quel état j avec ($r_j < 0$). La méthode de calcul des temps de contrôle dans ce cas devra prendre en considération cet aspect très important de fonctionnement que nous allons expliquer dans la suite.

Prenons par exemple le cas du temps de contrôle supérieur. Dans l'équation différentielle (4.4.6) le vecteur des temps moyens de sortie était le vecteur des temps passés par la chaîne de Markov dans chaque état j avant d'atteindre soit X_{max} , soit X_{min} . Cette fois nous considérons :

$$\vec{T}_s(x) = [T_s^1(x) \quad T_s^2(x) \quad \dots \quad T_s^N(x)]^T$$

le vecteur de temps de sortie vers X_H quand la chaîne de Markov est dans les états avec contrôle supérieur, dans la région $[X_H, X_{max}]$.

Dans ce cas, le vecteur initial de probabilité, \vec{p}_0 , devra se modifier en considérant l'aspect aléatoire décrit ci-dessus. La solution de l'équation (1.4.13) ($\dot{\vec{\pi}}(t) = \vec{\pi}(t)\mathbf{Q}$), dans le cas décrit ci-dessus deviendra donc :

$$\vec{\pi}_s = \vec{\pi}(T_{up}^j(X_H)) \quad (4.5.5)$$

que nous notons - *vecteur de probabilités de sortie vers X_H* . $T_{up}^j(X_H)$ est la solution (4.3.11) que nous l'avons obtenue dans la Section 4.3. Nous normalisons ce vecteur en fonction des états dans lesquels le système peut atteindre X_{max} . En conséquence nous pouvons définir $\vec{\pi}_{O_s}$, le *vecteur initial de probabilités* :

$$\vec{\pi}_{O_s} = [\pi_{O_s}(1) \quad \pi_{O_s}(2) \quad \dots \quad \pi_{O_s}(N)]^T$$

avec

$$\vec{\pi}_{O_s}(j) = \begin{cases} \frac{\vec{\pi}_s(j)}{\sum_{k \in S_s} \vec{\pi}_s(k)}, & \text{si } r_j > 0 \text{ et } S_s = \{k | r_k > 0\} \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (4.5.6)$$

Plus explicitement, $\vec{\pi}_{O_s}$ est la restriction normalisée de $\vec{\pi}_s$ au sous-ensemble d'états avec des taux de variation positives (S_s). Nous pouvons utiliser ce résultat dans l'équation différentielle spécifique aux temps de contrôle supérieur :

$$\mathbf{R}_s \frac{d\vec{T}_s(x)}{dx} + \mathbf{Q}^T \vec{T}_s(x) + \vec{\pi}_{O_s} = 0. \quad (4.5.7)$$

avec les conditions spécifiques aux limites (4.5.3). Si nous appliquons la même méthode de calcul utilisée pour (4.3.2) - (4.3.4), nous allons obtenir une solution du type (4.4.8) :

$$\vec{T}_s(x) = e^{\mathbf{W}(x-X_H)}\vec{T}_s(X_H) - \int_{X_H}^x e^{\mathbf{W}(x-\tau)}\mathbf{R}_s^{-1}\vec{\pi}_{O_s}d\tau \quad (4.5.8)$$

Pour illustrer la signification de ces temps de contrôle et la manière selon laquelle nous les calculons, prenons l'exemple d'un intégrateur commuté à quatre états ayant des taux de variation différents associés à chaque état : r_1 et r_3 négatifs et r_2 et r_4 positifs. La matrice des taux de variation R_s prendra donc la forme suivante :

$$\mathbf{R}_s = \begin{pmatrix} r_1 - QH_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 - QH_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 - QH_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 - QH_4 \end{pmatrix} \quad (4.5.9)$$

et le vecteur initial de probabilités deviendra :

$$\vec{\pi}_{O_s}(j) = \left[\frac{\vec{\pi}_s(1)}{\vec{\pi}_s(1) + \vec{\pi}_s(3)} \quad 0 \quad \frac{\vec{\pi}_s(3)}{\vec{\pi}_s(1) + \vec{\pi}_s(3)} \quad 0 \right]^T \quad (4.5.10)$$

Les temps de contrôle obtenus seront donc les temps que la chaîne de Markov passe dans les états ayant le contrôle supérieur $\{1HC, 2HC, 3HC, 4HC\}$. Leur somme sera le temps total pour appliquer le contrôle qui correspond à T_2 (autrement dit, le temps total passé dans la chaîne de Markov avec le contrôle supérieur), et qui est représenté par l'automate hybride à quatre états dans la Figure 4.8 :

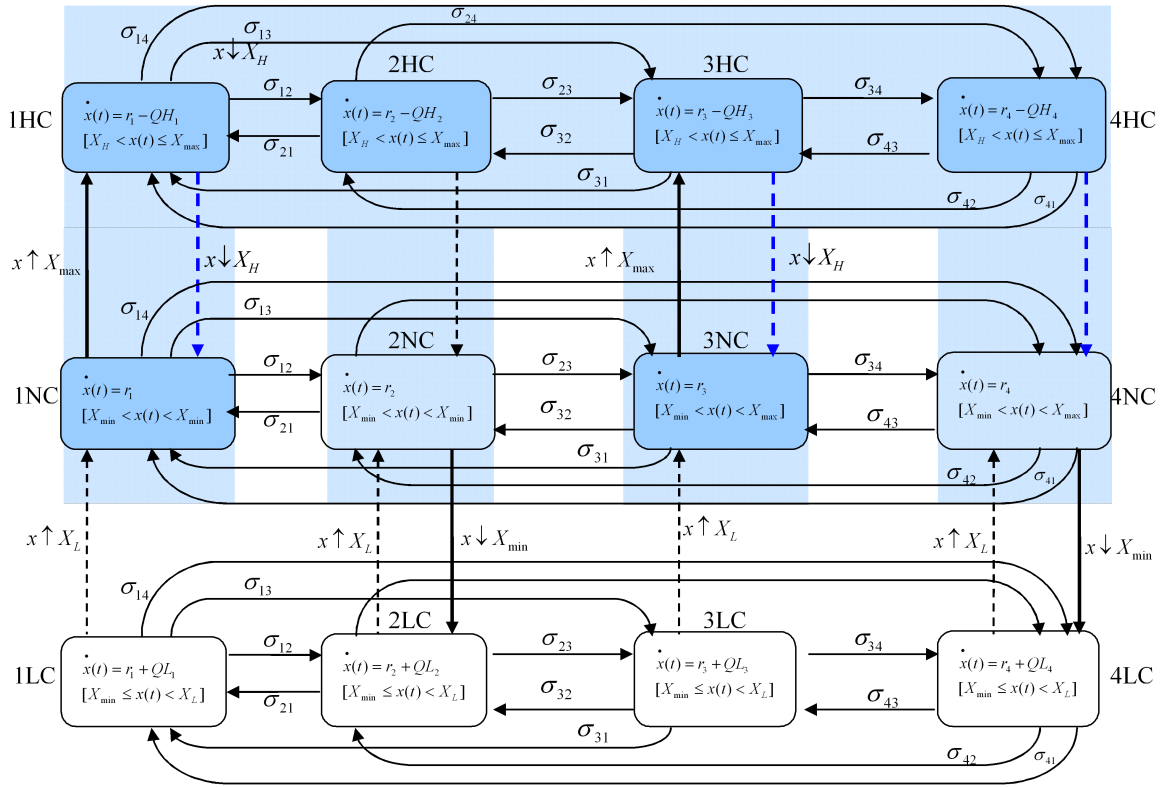
$$T_2(x) = T_8(x) = \sum_{k=1,N} T_s^k(x) \quad (4.5.11)$$

Une manière similaire de calculer le temps pour appliquer le contrôle inférieur est réalisée à partir de l'équation :

$$\mathbf{R}_i \frac{d\vec{T}_i(x)}{dx} + \mathbf{Q}^T \vec{T}_i(x) + \vec{\pi}_{O_i} = 0. \quad (4.5.12)$$

où \mathbf{R}_i est la matrice de taux de variation avec le contrôle inférieur (4.5.2), $\vec{\pi}_{O_i}$ est le vecteur initial de probabilité :

$$\vec{\pi}_{O_i} = [\pi_{O_i}(1) \quad \pi_{O_i}(2) \quad \dots \quad \pi_{O_i}(N)]^T$$


 FIGURE 4.8 – Le temps de contrôle supérieur T_2 .

avec

$$\vec{\pi}_{O_i}(j) = \begin{cases} \frac{\vec{\pi}_i(j)}{\sum_{k \in S_i} \vec{\pi}_i(k)}, & \text{si } r_j < 0 \text{ et } S_i = \{k | r_k < 0\} \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (4.5.13)$$

et $\vec{\pi}_i$ le vecteur de probabilités de sortie vers X_L :

$$\vec{\pi}_i = \vec{\pi}(T_{dw}^j(X_L)) \quad (4.5.14)$$

$\vec{\pi}_{O_i}$ est la restriction normalisée de $\vec{\pi}_i$ au sous-ensemble d'états avec des taux de variation négatifs (S_i) et $T_{dw}^j(X_L)$ est le temps de sortie de la région $[X_{min}, X_L]$ (4.3.10). La solution de (4.5.12) représente le vecteur colonne de temps de contrôle inférieur :

$$\vec{T}_i(x) = [T_i^1(x) \quad \dots \quad T_i^N(x)]^T$$

qui prendra la forme suivante (avec $\mathbf{W} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T$) :

$$\vec{T}_i(x) = e^{\mathbf{W}(x-X_{min})}\vec{T}_i(X_{min}) - \int_{X_{min}}^x e^{\mathbf{W}(x-\tau)}\mathbf{R}_i^{-1}\vec{\pi}_{O_i}d\tau \quad (4.5.15)$$

dont la somme des éléments correspond au temps de contrôle inférieur $T_4 = T_6$ de la Figure 4.1 (autrement dit au temps total passé dans la chaîne de Markov pour appliquer le contrôle inférieur) :

$$T_4(x) = T_6(x) = \sum_{k=1, N} T_i^k(x) \quad (4.5.16)$$

Des exemples numériques sur toutes ces méthodes de calcul de temps de sortie et de contrôle seront donnés dans le Chapitre 5.

4.6 Energies

Une fois que les temps de sortie de la région de contrôle, les temps pour appliquer le contrôle et les probabilités de sortie vers X_{max} et X_{min} sont connus, nous pouvons ensuite retourner à l'équation (4.1.10) et écrire les énergies consommées dans chaque scénario, comme :

- les énergies consommées pour appliquer le contrôle supérieur dans un état j :

$$e_1^j = e_4^j = \int_0^{T_s^j} QH_j^2 dt = QH_j^2 \cdot T_s^j \quad (4.6.1)$$

- les énergies consommées pour appliquer le contrôle inférieur dans un état j :

$$e_2^j = e_3^j = \int_0^{T_i^j} QL_j^2 dt = QL_j^2 \cdot T_i^j \quad (4.6.2)$$

Si nous considérons le caractère aléatoire du système (les quatre scénarios de la Figure 4.1 sont possibles) et du fait que les temps de sortie vont influencer l'application du contrôle (par exemple si le temps de sortie vers X_{max} : T_7^j est souvent très long, alors le contrôlé supérieur sera appliqué moins fréquemment que le contrôle inférieur) nous pouvons exprimer :

- l'énergie totale pour appliquer le contrôle supérieur dans un état j :

$$EH_{tot}^j = p_1^j \frac{e_1^j}{T_1^j + T_s^j} + p_4^j \frac{e_4^j}{T_7^j + T_s^j}. \quad (4.6.3)$$

- l'énergie totale pour appliquer le contrôle inférieur dans un état j :

$$EL_{tot}^j = p_2^j \frac{e_2^j}{T_3^j + T_i^j} + p_3^j \frac{e_3^j}{T_5^j + T_i^j}. \quad (4.6.4)$$

- l'énergie totale pour appliquer tout contrôle dans un état j (l'équivalent de l'équation (4.1.10)) :

$$En_{tot}^j = EH_{tot}^j + EL_{tot}^j. \quad (4.6.5)$$

Avec ces énergies définies, nous pouvons écrire maintenant l'énergie totale consommée par le système dans tous les états, comme :

$$En_{tot} = \sum_{j=1}^N \pi_j En_{tot}^j. \quad (4.6.6)$$

où $\vec{\pi} = [\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_N]$ est le vecteur de probabilités stationnaires qui respecte la relation $\vec{\pi}\mathbf{Q} = 0$.

A ce point, nous savons calculer tous les éléments du modèle probabiliste d'énergie dont nous avons besoin pour utiliser le critère quadratique de minimisation d'énergie. Le modèle que nous avons construit sera validé avec les résultats de la simulation en temps continu dans le chapitre suivant.

4.7 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons construit le modèle probabiliste d'énergie stationnaire pour le système stochastique à commutation que nous avons défini dans le Chapitre 2 avec le contrôle basé sur les événements. Dans une première partie, nous avons établi l'objectif de notre travail et nous avons déterminé les éléments à calculer (Section 4.1) dans le but d'appliquer le critère quadratique de minimisation. La méthode analytique que nous proposons a permis de déterminer : les probabilités de sortie de la zone de contrôle caractéristiques à chaque état (Section 4.2), les temps de sortie vers une limite spécifique en utilisant ces probabilités de sortie (Section 4.3), les temps de sortie soit vers X_{min} , soit vers X_{max} dans un état j (Section 4.4) et les temps pour appliquer le contrôle (Section 4.5). Ces mesures calculées nous ont aidé à formuler les expressions des énergies consommées quand le CBE est appliqué dans la Section 4.6.

Chapitre 5

Comparaison des résultats analytiques et de la simulation

Dans ce chapitre nous allons comparer les résultats du modèle probabiliste proposé dans le Chapitre 4 et les résultats obtenus par la simulation à événements discrets que nous avons présentée dans le Chapitre 3. L'approche consiste à vérifier les énergies par scénarios (Figure 4.1), et les probabilités caractéristiques à chaque scénario (4.2.7) - (4.2.7), en suivant les méthodes analytiques que nous avons introduites dans le Chapitre 4. Dans la Section 5.1 nous allons présenter les résultats numériques obtenus pour les moments de performabilité d'ordre 1 et 2 qui nous aident à calculer le critère quadratique utilisé dans le chapitre précédent (4.1.1). La Section 5.2 est réservée au calcul des probabilités et des temps de sortie de la région de contrôle, suivie par la Section 5.3, dans laquelle nous présentons les résultats pour déterminer les temps de sortie caractéristiques à chaque état du système. Ce dernier résultat motive nos études pour valider les temps nécessaires pour appliquer le contrôle dans la Section 5.4. Une fois que nous avons calculé les probabilités, les temps de sortie et les temps de contrôle, nous pouvons calculer les énergies consommées pour appliquer le contrôle basé sur les événements dans la Section 5.5. Dans la dernière Section 5.7 nous traitons les problèmes numériques que nous avons rencontrés dans notre travail.

5.1 Moments de performabilité sans contrôle

Dans cette section nous allons présenter les résultats numériques obtenus dans l'étape de vérification et de validation des moments de performabilité que nous avons introduits dans la Section 4.1 du chapitre précédent. Nous allons utiliser les deux premiers moments de performabilité (4.1.5) - (4.1.8) pour réaliser la comparaison avec la moyenne de X , respectivement avec le deuxième moment de X sur les N_r simulations lancées.

Un des paramètres que nous avons besoin de calculer pour appliquer le critère quadratique de performance (4.1.1) est le moment d'ordre 2 que nous avons noté $E[x^2(t)]$. Nous allons d'abord présenter des résultats obtenus pour l'intégrateur commuté sans restrictions de contrôle, suivi par les résultats obtenus pour l'intégrateur contrôlé.

Prenons un premier exemple d'intégrateur n'ayant que des états qui sont caractérisés par des taux de variation positives. Cette première expérience de simulation permet de montrer la différence avec le cas d'un comportement aléatoire du système. Les exemples suivants seront réalisés avec des taux de variation de signe différent comme défini dans le Chapitre 2.

Soit l'intégrateur commuté à deux états avec les paramètres suivants :

- les taux de variation des états : $r_1 = 3, r_2 = 4$,
- les taux de transition entre les états : $\lambda_{12} = 3, \lambda_{21} = 2$,
- sur une durée de simulation de $T_f = 1000$ unités de temps,
- et un nombre de réplifications $N_r = 2000$.

Les erreurs que nous avons obtenues entre les résultats de la simulation et les résultats de la méthode analytique, pour chaque moment $m_k, k \in \{1, 2\}$, sont calculées en utilisant la formule :

$$Erreur_{m_k} = \frac{|m_{k_{sim}} - m_{k_{analytique}}|}{m_{k_{sim}}} \times 100 \quad (5.1.1)$$

Dans la Figure 5.1 nous représentons les erreurs entre la simulation et la méthode analytique, que nous avons obtenu pour l'intégrale du premier moment de performabilité (4.1.6), respectivement pour l'intégrale du deuxième moment de performabilité (4.1.9). Nous observons que les deux erreurs obtenues ont des valeurs faibles, limitées à 0.18% pour $m_1(t)$ et 0.38% pour $m_2(t)$. En moyenne, sur les N_r simulations, nous avons obtenu une erreur de 0.009% pour $m_1(t)$, et 0.01% pour $m_2(t)$.

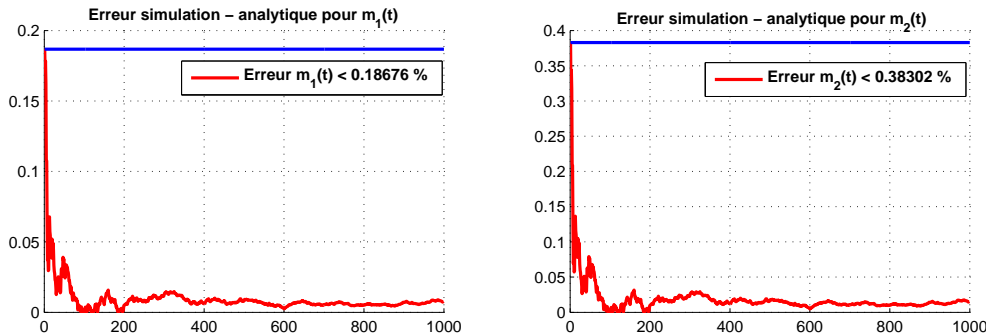


FIGURE 5.1 – Erreurs méthode analytique - simulation pour a) $m_1(t)$ et b) $m_2(t)$.

Prenons maintenant l'évolution du système ayant des taux de variation de signes différents ($r_1 > 0, r_2 < 0$). Soit l'intégrateur commuté à deux états avec les paramètres suivants :

- les taux de variation : $r_1 = 3$, $r_2 = -2$,
- les taux de transition entre les états $\lambda_{12} = 0.4$, $\lambda_{21} = 0.6$,
- la période statistique $d_{\text{sampl}} = 0.01$.

Les $N_r = 10.000$ simulations ont été réalisées sur une durée de simulation de $T_f = 2000$ unités de temps. Comme les taux de variation ont des signes différents, le comportement aléatoire du système va introduire une difficulté de calcul supplémentaire. Dans la Figure 5.2 nous pouvons observer la différence de comportement entre un intégrateur ayant uniquement des taux de variation positives, et un intégrateur ayant des taux de variation de signe différent. Cet aspect du comportement du système va influencer le choix du nombre de simulations effectuées (N_r), la durée du calcul (T_f), etc.

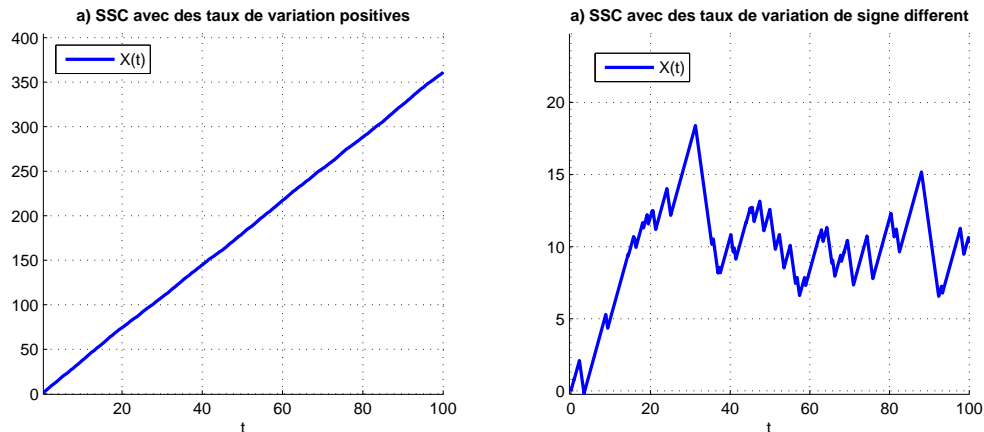


FIGURE 5.2 – La variable d'état $x(t)$ pour un intégrateur avec des taux de variation a) positifs b) de signe différent.

Si nous comparons les espérances des deux moments de performabilité de la même manière que pour l'intégrateur précédent ($N_r = 10.000$, $T_f = 2000$), nous obtenons les erreurs présentées dans la Figure 5.3. Encore une fois, nous observons que même pour un intégrateur ayant des taux de variation de signe différent, les erreurs obtenues sont faibles. Nous obtenons une erreur inférieure à 0.76% pour $m_1(t)$ et inférieure à 0.85% pour $m_2(t)$. En moyenne, sur les N_r simulations, une erreur de 0.12% a été obtenue pour $m_1(t)$, et 0.25% pour $m_2(t)$.

Prenons l'intégrateur précédent avec des taux de variation de signes différents, sur lequel nous appliquons le contrôle basé sur les événements dans la zone de contrôle : $[X_{\min}, X_{\max}] = [-10, 10]$ avec les points d'arrêt du contrôle suivants : $X_H = 5$, $X_L = -5$. $N_r = 50.000$ simulations ont été effectuées sur des durées de simulation variables. La zone de contrôle limite l'évolution de la variable d'état, donc à chaque simulation, la durée finale de simulation (T_f) sera variable, car nous arrêtons la simulation quand une limite (soit X_{\min} , soit X_{\max}) est atteinte. Du point de vue analytique, la durée de simulation représente le temps de sortie de la zone de contrôle que nous allons présenter dans la

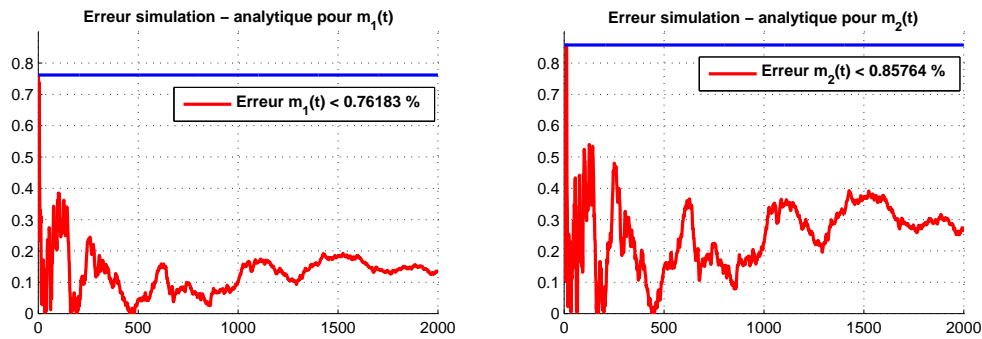


FIGURE 5.3 – Erreurs $m_1(t)$, $m_2(t)$ pour un intégrateur avec des taux de variation différents.

Section 5.2.

Si nous comparons les erreurs des intégrales des moments de performabilité que nous calculons pour l'intégrateur contrôlé, nous obtenons des erreurs inférieures à 0.22% pour $m_1(t)$, et 0.56% pour $m_2(t)$, comme représenté dans la Figure 5.4.

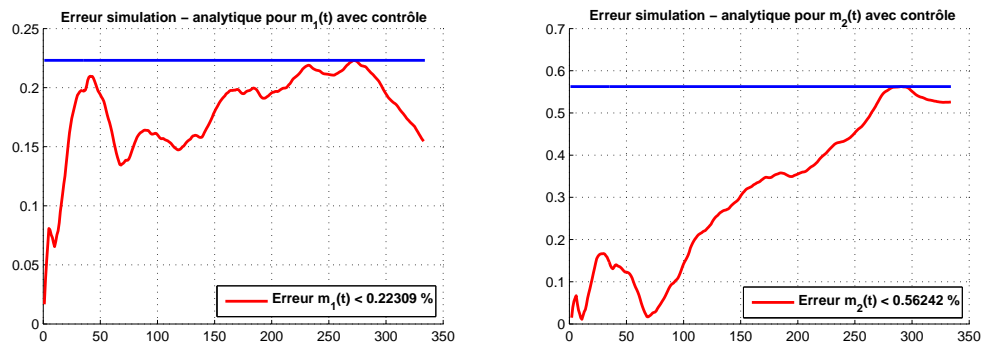


FIGURE 5.4 – Erreurs de $m_1(t)$, $m_2(t)$ pour un intégrateur contrôlé avec des taux de variation différents.

Ces derniers résultats nous confirment que le moment d'ordre 2 de la variable d'état, pourra être utilisé dans le critère quadratique de performance (4.1.1). Afin de pouvoir calculer l'énergie consommée pour appliquer le contrôle, $u^2(t)$, nous avons besoin de valider plusieurs paramètres que nous présentons dans les sections suivantes.

5.2 Probabilités et temps de sortie

Les résultats que nous allons présenter dans cette section correspondent aux méthodes analytiques présentées dans les Sections 4.2 et 4.3. Dans une première étape nous

présentons les probabilités de sortie de la région de contrôle, suivi par les résultats des temps de sortie de cette région.

Commençons par un intégrateur à commutation à deux états, avec des taux de variation différents associés à chaque état : $r_1 > 0$ et $r_2 < 0$. L'ensemble de données que nous considérons pour la validation contient les paramètres suivants :

- les taux de variation : $r_1 = 7$, $r_2 = -4$, avec
- les variables de contrôle : $QH_1 = 8$, $QH_2 = 0.5$, $QL_1 = 0.5$, $QL_2 = 5$ qui respectent les règles du contrôle :

$$\begin{cases} r_1 - QH_1 < 0 & r_2 - QH_2 < 0 \\ r_1 + QL_1 > 0 & r_2 + QL_2 > 0 \end{cases}$$

- les taux de transition entre les états : $\lambda_{12} = 9$, $\lambda_{21} = 5$,
- la zone de contrôle : $X_{max} = 1$, $X_{min} = 0$, avec
- les points d'arrêt du contrôle : $X_H = 0.8$, $X_L = 0.4$, et
- la période statistique $d_{sampl} = 0.01$.

$N_r = 500.000$ simulations sont effectuées en suivant les scénarios que nous avons représentés dans la Figure 4.1. Plus spécifique, nous avons démarré les simulations dans l'état 1 ou 2, et dans un point précis (X_H ou X_L). Quand le système arrive à X_{min} ou à X_{max} nous appliquons le contrôle supérieur ou inférieur jusqu'au moment où le système arrive en X_H ou X_L . Les probabilités et les temps moyens de sortie seront calculés sur les N_r simulations.

Pour appliquer la méthode analytique, nous utilisons l'équation (4.2.15). Nous écrivons cette équation pour l'intégrateur à commutation à deux états, dans le cas où X_{max} est atteint :

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d\pi_{up}^1(x)}{dx} \\ \frac{d\pi_{up}^2(x)}{dx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_{12} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & -\lambda_{21} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \pi_{up}^1(x) \\ \pi_{up}^2(x) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.2.1)$$

où $\pi_{up}^1(x)$ et $\pi_{up}^2(x)$ sont les probabilités de sortie vers X_{max} en partant de l'état 1, respectivement en partant de l'état 2. De la même manière nous utilisons l'équation (4.2.17) pour l'intégrateur à deux états, où $\pi_{dw}^1(x)$ et $\pi_{dw}^2(x)$ sont les probabilités d'arriver à la limite minimale en partant de l'état 1, respectivement en partant de l'état 2 :

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d\pi_{dw}^1(x)}{dx} \\ \frac{d\pi_{dw}^2(x)}{dx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_{12} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & -\lambda_{21} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \pi_{dw}^1(x) \\ \pi_{dw}^2(x) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.2.2)$$

Toutes ces probabilités de sortie ($\pi_{up}^1(x)$, $\pi_{up}^2(x)$, $\pi_{dw}^1(x)$, $\pi_{dw}^2(x)$) vérifient les conditions aux limites suivantes :

$$a) \quad \pi_{up}^1(X_{max}) = 1 \quad (5.2.3)$$

$$b) \quad \pi_{up}^2(X_{min}) = 0 \quad (5.2.4)$$

$$c) \quad \pi_{dw}^1(X_{max}) = 0 \quad (5.2.5)$$

$$d) \quad \pi_{dw}^2(X_{min}) = 1 \quad (5.2.6)$$

qui s'expliquent facilement à l'aide des taux de variation associés à chaque état. Par exemple si le système démarre dans l'état 1 (avec $r_1 > 0$), en X_{max} , alors la probabilité d'arriver à X_{max} est 1 (5.2.3), car le système est déjà dans la limite maximale. Si le système démarre en X_{min} , dans un état 2 (avec $r_2 < 0$), alors il n'arrivera pas à X_{max} , donc la probabilité de sortie vers la limite maximale est zéro (5.2.4).

Probabilités	Méthode analytique	Simulation	Erreurs[%]
$\pi_{up}^1(XH)$	0.8856	0.8850	0.0678
$\pi_{dw}^1(XH)$	0.1144	0.1150	0.5217
$\pi_{up}^1(XL)$	0.6585	0.6574	0.1670
$\pi_{dw}^1(XL)$	0.3414	0.3426	0.3503
$\pi_{up}^2(XH)$	0.4405	0.4393	0.2724
$\pi_{dw}^2(XH)$	0.5595	0.5607	0.2140
$\pi_{up}^2(XL)$	0.2170	0.2181	0.5044
$\pi_{dw}^2(XL)$	0.7830	0.7819	0.1405

TABLE 5.1 – Les probabilités de sortie vers X_{max} , X_{min} pour un intégrateur commuté à deux états.

Dans la Figure 5.5 nous représentons les probabilités de sortie vers X_{max} ou X_{min} , qui sont les solutions des équations (5.2.1) - (5.2.7) pour l'intégrateur à commutation à deux états que nous utilisons dans cette section. Dans cette figure nous observons que les probabilités obtenues respectent les conditions aux limites (5.2.3) - (5.2.6). Nous présentons aussi les résultats numériques dans le Tableau 5.1. Entre les résultats analytiques et les résultats de la simulation nous obtenons une erreur inférieure à 0.52%. Les erreurs faibles pour les probabilités nous indiquent que la méthode que nous avons réalisée dans la Section (4.2) fonctionne.

En continuant le raisonnement de la Section 4.3 pour déterminer les temps de sortie vers la limite maximale X_{max} , nous utilisons les probabilités de sortie obtenues ci-dessus. L'équation (4.3.2) pour l'intégrateur à commutation à deux états que nous avons considéré, devient :

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d\gamma_{dw}^1(x)}{dx} \\ \frac{d\gamma_{dw}^2(x)}{dx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_{12} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & -\lambda_{21} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{dw}^1(x) \\ \gamma_{dw}^2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi_{up}^1(x) \\ \pi_{up}^2(x) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.2.7)$$

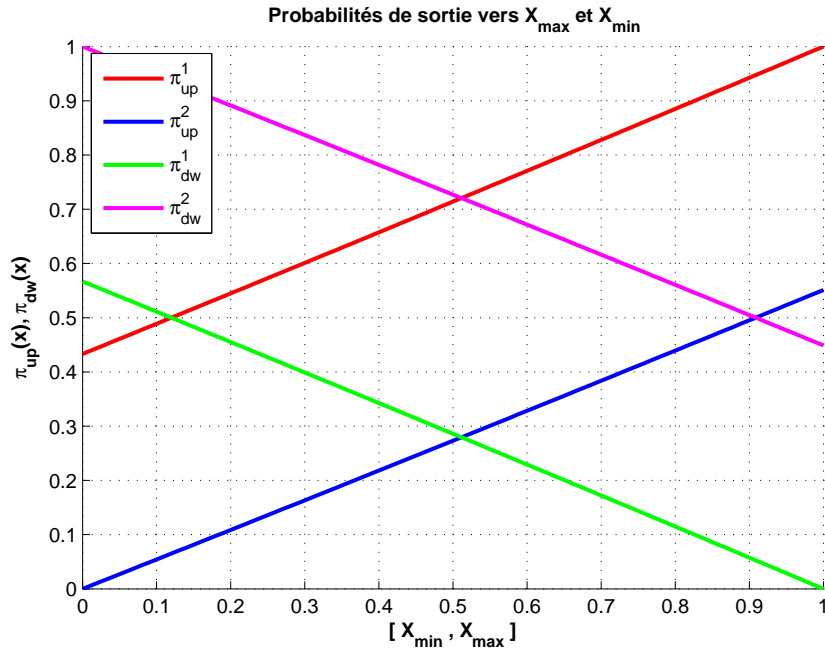


FIGURE 5.5 – Probabilités de sortie vers X_{min} et X_{max} pour un intégrateur commuté à deux états.

où $\vec{\gamma}_{up}(x)$ est le vecteur des fonctions qui caractérisent les couples “temps de sortie - probabilité de sortie” vers X_{max} :

$$\vec{\gamma}_{up}(x) = \begin{bmatrix} \gamma_{up}^1(x) & \gamma_{up}^2(x) \end{bmatrix}^T$$

Une équation similaire de type (4.3.4) peut être utilisée pour le vecteur des fonctions caractéristiques aux couples “temps de sortie - probabilité de sortie vers X_{min} ” ($\vec{\gamma}_{dw}(x)$) :

$$\vec{\gamma}_{dw}(x) = \begin{bmatrix} \gamma_{dw}^1(x) & \gamma_{dw}^2(x) \end{bmatrix}^T$$

Les deux vecteurs utilisés dans les équations précédentes ($\vec{\gamma}_{up}(x)$, $\vec{\gamma}_{dw}(x)$), respectent les conditions aux limites suivantes :

$$\gamma_{up}^1(X_{max}) = \gamma_{dw}^1(X_{max}) = 0 \quad (5.2.8)$$

$$\gamma_{up}^2(X_{min}) = \gamma_{dw}^2(X_{min}) = 0 \quad (5.2.9)$$

Si nous représentons ces fonctions “temps de sortie - probabilités de sortie”, nous observons dans la Figure 5.6 que les conditions aux limites (5.2.8) - (5.2.9) se respectent.

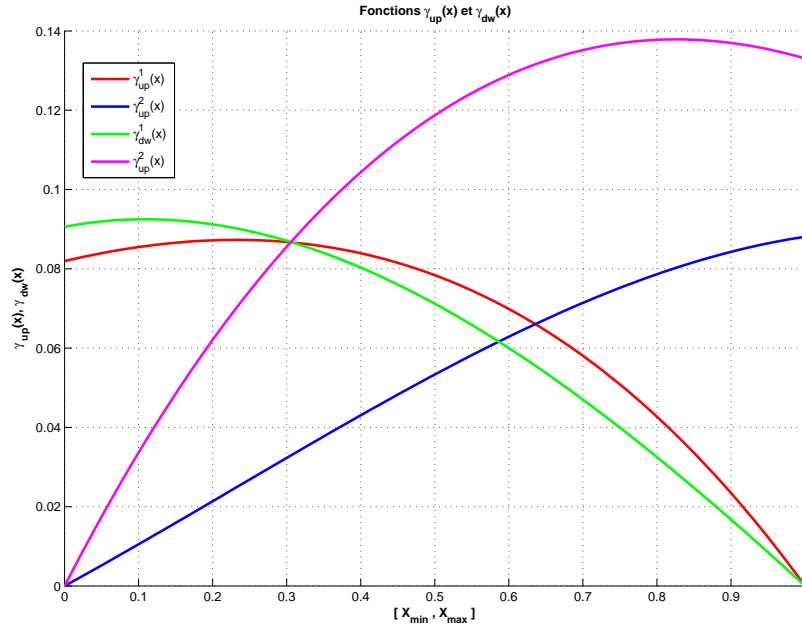


FIGURE 5.6 – Fonctions $\gamma_{up}(x)$ et $\gamma_{dw}(x)$ (probabilités de sortie vers X_{min} et X_{max} multipliées par le temps $T_{up}(x)$, respectivement par $T_{dw}(x)$).

Une fois ces fonctions calculées, nous pouvons déterminer les temps de sortie de la zone de contrôle en utilisant les équations (4.3.11) - (4.3.12) :

$$T_{up}^1(x) = \frac{\gamma_{up}^1(x)}{\pi_{up}^1(x)} \quad T_{up}^2(x) = \frac{\gamma_{up}^2(x)}{\pi_{up}^2(x)} \quad (5.2.10)$$

$$T_{dw}^1(x) = \frac{\gamma_{dw}^1(x)}{\pi_{dw}^1(x)} \quad T_{dw}^2(x) = \frac{\gamma_{dw}^2(x)}{\pi_{dw}^2(x)} \quad (5.2.11)$$

qui sont représentés dans la Figure 5.7, et qui vérifient aussi les conditions aux limites :

$$T_{up}^1(X_{max}) = T_{dw}^2(X_{min}) = 0$$

$$T_{up}^2(X_{min}) = T_{dw}^1(X_{max}) = 0$$

La comparaison entre les résultats analytiques et les résultats de la simulation est donnée dans le Tableau 5.2. Les erreurs faibles (inférieures à 0.82%) entre la simulation et la méthode analytique, nous indiquent que la méthode de calcul proposée pour les temps de sortie de la région de contrôle est valide.

Nous appliquons maintenant la méthode analytique pour un intégrateur commuté à plusieurs états, plus spécifique pour un intégrateur commuté à quatre états, avec différents taux de variation associés à chaque état, et les variables d'entrée suivantes :

Temps de sortie	Simulation	Analytique	Erreurs[%]
$T_{up}^1(XL)$	0.1278	0.1276	0.1565
$T_{up}^2(XL)$	0.1973	0.1974	0.0507
$T_{up}^1(XH)$	0.0486	0.0482	0.8299
$T_{up}^2(XH)$	0.1792	0.179	0.1116
$T_{dw}^1(XL)$	0.2337	0.2344	0.2986
$T_{dw}^2(XL)$	0.1335	0.1335	0
$T_{dw}^1(XH)$	0.2829	0.2824	0.1771
$T_{dw}^2(XH)$	0.2463	0.2457	0.2436

TABLE 5.2 – Les temps de sortie vers X_{max} , X_{min} pour un intégrateur commuté à deux états.

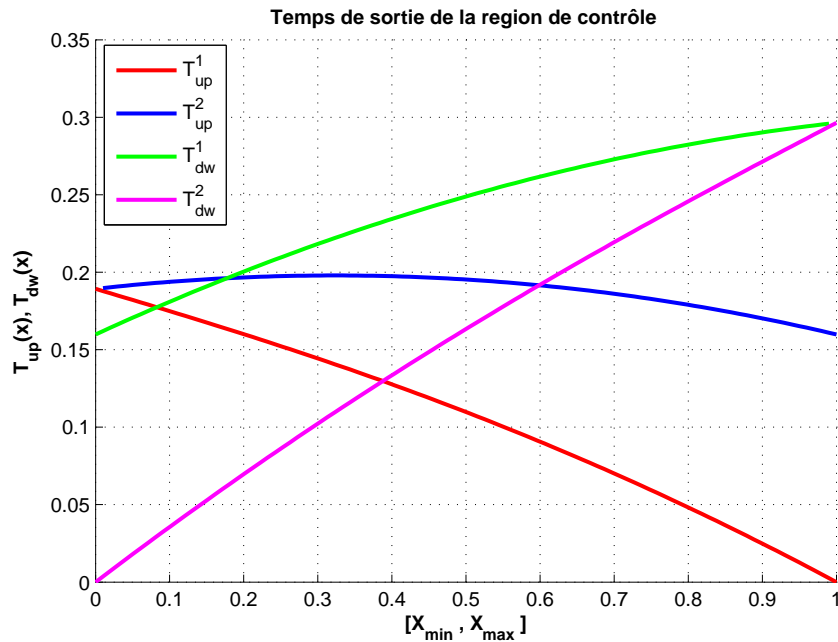


FIGURE 5.7 – Temps de sortie vers X_{min} et X_{max} pour un intégrateur commuté à deux états.

- les taux de variation : $r_1 = 9$, $r_2 = -4$, $r_3 = 6$, $r_4 = -8$,
- la zone de contrôle : $X_{max} = 1$, $X_{min} = 0$,
- les points d'arrêt du contrôle : $X_H = 0.8$, $X_L = 0.4$,
- la période statistique $d_{sampl} = 0.01$,
- les variables de contrôle : $QH_1 = 10$, $QH_2 = 0.5$, $QH_3 = 7$, $QH_4 = 0.5$, $QL_1 = 0.5$,

$QL_2 = 5, QL_3 = 0.5, QL_4 = 9$ qui respectent les règles du contrôle :

$$\begin{cases} r_j - QH_j < 0 & \text{si } x(t) = X_{min} \\ r_j + QL_j > 0 & \text{si } x(t) = X_{max} \end{cases}$$

– le générateur du système :

$$Q = \begin{bmatrix} -45 & 16 & 12 & 17 \\ 9 & -20 & 5 & 6 \\ 10 & 12 & -30 & 8 \\ 12 & 13 & 15 & -40 \end{bmatrix} \quad (5.2.12)$$

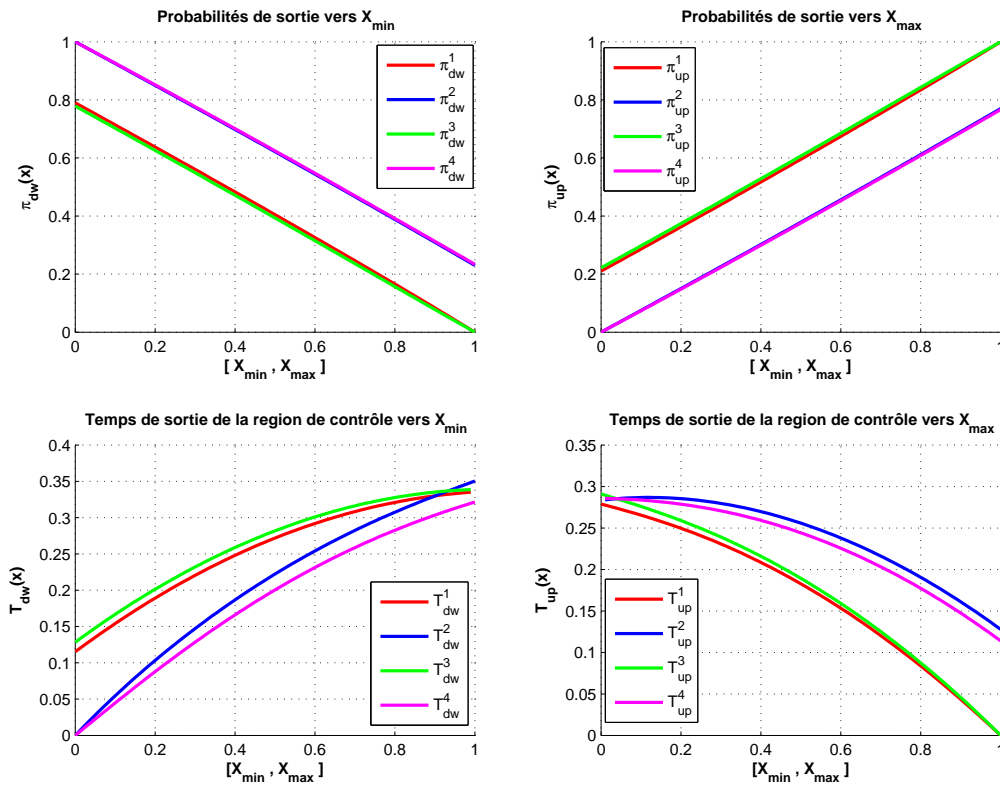


FIGURE 5.8 – Probabilités et temps de sortie vers X_{min} et X_{max} pour un intégrateur à quatre états.

De la même façon, $N_r = 100.000$ simulations ont été réalisées en suivant les quatre scénarios d'évolution (Figure 4.1) (départ dans un certain état en X_H ou X_L , arrivée aux limites, et application du contrôle) sur un grand nombre de répliques.

En passant par les mêmes étapes que pour l'intégrateur à deux états, nous allons obtenir les probabilités de sortie et les temps de sortie de la région de contrôle, comme représentées dans la Figure 5.8. Par contre, dans le Tableau 5.3, nous présentons seulement les valeurs numériques des temps de sortie obtenus par la méthode numérique et par la simulation, car les erreurs dans ce cas sont plus importantes (les erreurs des probabilités de sortie restent toujours inférieures à 0.5%).

Temps de sortie	Simulation	Analytique	Erreurs[%]
$T_{up}^1(XL)$	0.2082	0.2085	0.14
$T_{up}^2(XL)$	0.2683	0.2697	0.51
$T_{up}^3(XL)$	0.2156	0.2159	0.13
$T_{up}^4(XL)$	0.2595	0.2592	0.11
$T_{up}^1(XH)$	0.0840	0.0844	0.47
$T_{up}^2(XH)$	0.1893	0.1905	0.62
$T_{up}^3(XH)$	0.0879	0.0874	0.56
$T_{up}^4(XH)$	0.1767	0.1772	0.28
$T_{dw}^1(XL)$	0.2482	0.248	0.08
$T_{dw}^2(XL)$	0.1863	0.1867	0.21
$T_{dw}^3(XL)$	0.2602	0.2588	0.53
$T_{dw}^4(XL)$	0.1661	0.166	0.06
$T_{dw}^1(XH)$	0.3211	0.321	0.03
$T_{dw}^2(XH)$	0.3083	0.3075	0.25
$T_{dw}^3(XH)$	0.3278	0.3276	0.06
$T_{dw}^4(XH)$	0.2833	0.2826	0.24

TABLE 5.3 – Les temps de sortie vers X_{max}, X_{min} pour un intégrateur à quatre états.

Les faibles erreurs obtenues pour les temps de sortie (inférieures à 0.62%), confirment encore une fois que la méthode pour calculer les temps de sortie d'une région de contrôle fonctionne aussi pour des systèmes à plusieurs états.

Une fois que nous avons la certitude que les probabilités de sortie de la zone de contrôle sont correctes :

$$P_{X_H X_{max}}^j = \pi_{up}^j(XH)$$

$$P_{X_H X_{min}}^j = \pi_{dw}^j(XH)$$

$$P_{X_L X_{max}}^j = \pi_{up}^j(XL)$$

$$P_{X_L X_{min}}^j = \pi_{dw}^j(XL)$$

nous pouvons calculer les probabilités des scénarios dont nous avons besoin, en utilisant les équations (4.2.5) - (4.2.6) pour les probabilités P_H^j et P_L^j , et les équations (4.2.7) - (4.2.10) pour $\{p_1^j, p_2^j, p_3^j, p_4^j\}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Dans le Tableau 5.4 nous observons que la méthode de calcul des probabilités de départ en X_H ou en X_L nous donne des erreurs inférieurs à 0.98%, ce qui confirme sa validité même pour des intégrateurs aux états multiples. En ce qui concerne les probabilités de chaque scénario $(p_1^j, p_2^j, p_3^j, p_4^j)$, le Tableau 5.5 contient les erreurs simulation - analytique correspondant aux quatre états du système. Les erreurs faibles (maximum 0.95%) vérifient encore une fois les deux méthodes (pour les probabilités et pour les temps de sortie), et nous aident à continuer le travail de calcul des énergies consommées pour appliquer le contrôle (4.1.10).

Probabilité	Analytique	Simulation	Erreurs[%]
P_H^1	0.7575	0.7606	0.40
P_H^2	0.4373	0.4394	0.47
P_H^3	0.7712	0.7693	0.24
P_H^4	0.4330	0.4332	0.04
P_L^1	0.2425	0.2398	0.98
P_L^2	0.5627	0.5606	0.37
P_L^3	0.2288	0.2307	0.82
P_L^4	0.5670	0.5668	0.03

TABLE 5.4 – Probabilité de départ, en X_H et X_L , dans différents états.

Probabilités	Méthode analytique	Simulation	Erreurs[%]
p_1^1	0.6321	0.6374	0.83
p_1^2	0.1254	0.1242	0.95
p_1^3	0.1171	0.1177	0.50
p_1^4	0.1254	0.1248	0.48
p_2^1	0.2675	0.2689	0.52
p_2^2	0.1699	0.1705	0.35
p_2^3	0.1693	0.1688	0.29
p_2^4	0.0732	0.0738	0.81
p_3^1	0.6503	0.6476	0.41
p_3^2	0.1209	0.1218	0.73
p_3^3	0.1143	0.1145	0.17
p_3^4	0.1282	0.1280	0.15
p_4^1	0.2635	0.263	0.19
p_4^2	0.1696	0.1702	0.35
p_4^3	0.1700	0.1697	0.17
p_4^4	0.0725	0.0728	0.41

TABLE 5.5 – Les probabilités des scénarios pour chaque états du système.

5.3 Résultats des temps de sortie caractéristiques à chaque état

Dans cette section nous présentons les résultats numériques que nous avons obtenus pour calculer les temps de sortie de la zone de contrôle caractéristiques à chaque état (Section 4.4). Comme déjà remarqué dans la Section 4.4, dans cette étape nous calculons *les temps de séjour passés dans un état j avant d'atteindre soit X_{min} , soit X_{max} , en partant en mode aléatoire de l'état 1 ou de 2, en fonction des probabilités stationnaires de la chaîne de Markov (p_0^1, p_0^2)* . C'est une méthode importante car elle nous a permis de construire et de vérifier les temps nécessaires pour appliquer le contrôle.

Les exemples suivants sont construits pour des intégrateurs à deux états. Utilisons l'équation (4.4.6) pour un intégrateur commuté à deux états :

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dT_1(x)}{dx} \\ \frac{dT_2(x)}{dx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_{12} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & -\lambda_{21} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_0^1 \\ p_0^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.3.1)$$

où p_0^1 et p_0^2 sont les probabilités stationnaires de la chaîne de Markov, et $T_1(x)$, $T_2(x)$ les temps de sortie de la région de contrôle qui ont la signification suivante :

- $T_1(x)$ est le temps moyen de séjour dans l'état 1, avant que le système arrive aux limites de contrôle, et avec un état initial de départ choisi aléatoirement.
- $T_2(x)$ est le temps moyen de séjour dans l'état 2 avant que le système arrive aux limites de contrôle, et avec un état initial de départ choisi aléatoirement.

Ces deux temps respectent les conditions aux limites :

$$T_1(X_{max}) = 0, \quad T_2(X_{min}) = 0$$

Une fois ces temps déterminés, nous pouvons calculer le *temps moyen total passé dans la chaîne de Markov* avant d'arriver soit à X_{min} soit à X_{max} :

$$T_{tot}(x) = T_1(x) + T_2(x) \quad (5.3.2)$$

Prenons par exemple l'intégrateur commuté à deux états caractérisé par les paramètres suivants :

$$r_1 = 2, r_2 = -7, \lambda_{12} = 0.2, \lambda_{21} = 0.7,$$

$$X_{max} = 200, X_{min} = -200, X_H = 50, X_L = -50, d_{sampl} = 1.$$

Si nous appliquons la méthode analytique pour sortir de la zone de contrôle, nous allons obtenir les temps de sortie $T_1(x)$, $T_2(x)$ et $T_{tot}(x)$ comme représentés dans la Figure 5.9.

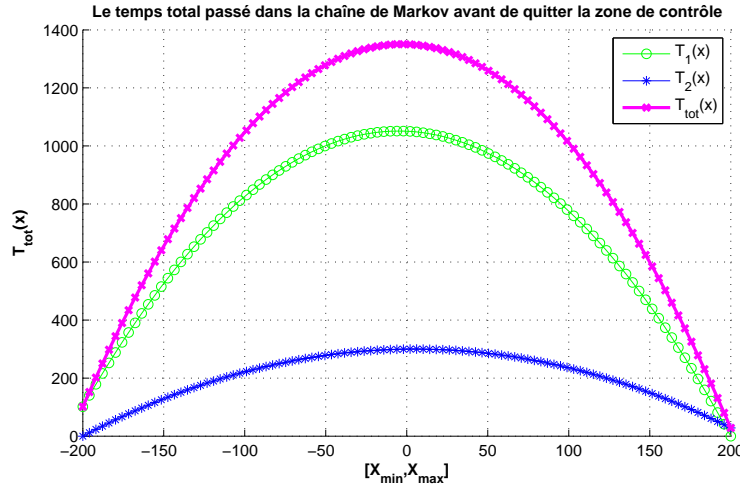


FIGURE 5.9 – Temps moyens de sortie vers X_{min} et X_{max} caractéristiques à chaque état.

Concernant la simulation, nous avons démarré en mode aléatoire :

- soit de X_H , soit de X_L en fonction des probabilités pour appliquer le contrôle inférieur ou supérieur. Dans la simulation, ces probabilités ont été obtenues sur N_r simulations, qui ont démarré dans un point de départ $X_m = (X_{max} - X_{min})/2$. Nous comptons le nombre de fois quand le système s'arrête en X_H (n_H), respectivement en X_L (n_L) après avoir appliqué le contrôle. En fonction de n_H et n_L nous calculons les probabilités pour démarrer la simulation en X_H ou en X_L .
- soit dans l'état 1, soit dans l'état 2, en fonction des probabilités stationnaires (p_0^1 , p_0^2).

Dans l'étape de validation nous faisons les comparaisons suivantes :

- $T_{tot}(X_H)$ analytique correspond à un temps de simulation que nous notons :

$$T_{sim}^{X_H} = p_{X_H X_{max}} \cdot T_1 + p_{X_H X_{min}} \cdot T_3,$$

car $T_{tot}(X_H)$ signifie le temps total passé dans la chaîne de Markov en partant de X_H , soit de l'état 1 soit de 2 avec une arrivée aussi aléatoire soit vers X_{max} , soit vers X_{min} .

- $T_{tot}(X_L)$ analytique correspond à un temps de simulation que nous notons :

$$T_{sim}^{X_L} = p_{X_L X_{max}} \cdot T_7 + p_{X_L X_{min}} \cdot T_5,$$

car $T_{tot}(X_L)$ est le temps total passé dans la chaîne de Markov en partant de X_L , soit de l'état 1 soit de 2 avec une arrivée aussi aléatoire soit vers X_{max} , soit vers X_{min} .

Les résultats numériques de ces temps sont donnés dans le Tableau 5.6. Nous pouvons observer les erreurs faibles entre l’approche analytique proposée dans la Section 4.4 et la simulation.

	$T_{tot}(X_H)$	$T_{tot}(X_L)$
Simulation	1253	1277.9
Analytique	1261	1279
Erreurs[%]	0.63	0.08

TABLE 5.6 – Les temps de sortie de $[X_{min}, X_{max}]$ en partant de X_H, X_L pour un intégrateur commuté à deux états.

Nous faisons la remarque que le choix des paramètres d’entrée du système (les taux de variation, la dimension de la zone de contrôle, les paramètres de contrôle, etc.) influence les temps de sortie que nous calculons. En conséquence, nous appliquons la méthode analytique sur plusieurs ensembles de paramètres d’entrée, pour un intégrateur à deux états (Tableau 5.7). $N_r = 100.000$ réplifications ont été effectuées, pour lesquelles nous avons calculé les temps moyens de sortie.

Nr.	r_1	r_2	λ_{12}	λ_{21}	X_{max}	X_{min}	X_H	X_L
1	8	-5	0.7	0.4	60	-60	25	-25
2	10	-15	0.4	0.8	100	-100	50	-50
3	5	-6	0.6	0.7	200	0	150	50
4	20	-20	0.5	0.5	500	-500	200	-200
5	100	-150	1.7	3	300	-300	100	-100

TABLE 5.7 – Ensembles de paramètres pour les simulations.

Nr.	Analytique		Simulation		Erreur [%]	
	$T_{tot}(X_H)$	$T_{tot}(X_L)$	$T_{tot}(X_H)$	$T_{tot}(X_L)$	$T_{tot}(X_H)$	$T_{tot}(X_L)$
1	53.97	45.57	53.83	45.35	0.26	0.48
2	188.6	170.3	188.20	170.11	0.21	0.11
3	25.69	41.64	25.65	41.85	0.15	0.50
4	287.50	287.50	290.89	284.31	1.16	1.10
5	12.43	15.55	12.57	15.34	1.11	1.35

TABLE 5.8 – Comparaisons simulation - analytique pour les temps de sortie des ensembles de paramètres du Tableau 5.7.

Les erreurs entre les temps de sortie obtenus par la simulation et par la méthode analytique (Section 4.4) sont données dans le Tableau 5.8. Nous observons que, malgré une grande zone de contrôle (ensemble 4), ou des valeurs grands des taux de variation

(ensemble 5), nous obtenons des erreurs faibles, inférieures à 1.35%. Ces résultats nous aident dans le calcul des temps de contrôle que nous présentons dans la section suivante.

5.4 Résultats des temps de contrôle

Après la validation de la méthode de calcul des temps de séjour caractéristiques à chaque état, nous pouvons calculer maintenant les temps de contrôle, car la méthode présentée dans la Section 4.4 s'applique aussi dans les zones avec contrôle supérieur ou inférieur. Dans la Figure 5.10 sont représentés les temps de contrôle dans les quatre scénarios d'évolution. Cette représentation nous permet de considérer les temps de contrôle comme des temps de sortie d'une région de contrôle spécifique (soit $[X_H, X_{max}]$, soit $[X_{min}, X_L]$).

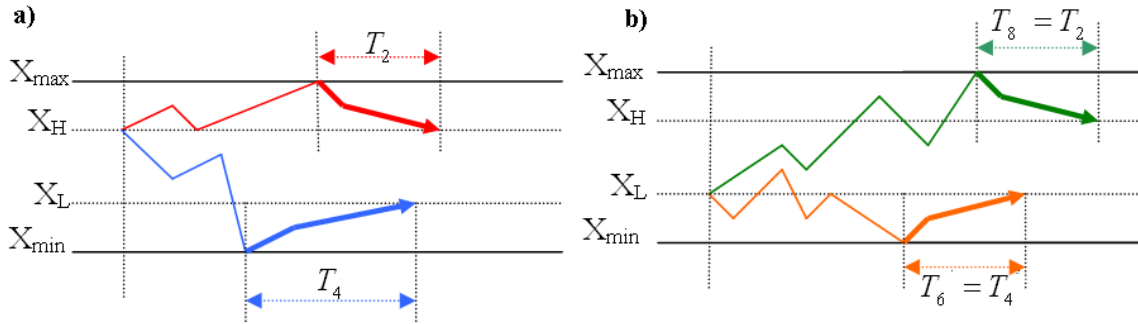


FIGURE 5.10 – Les temps de contrôle supérieur $T_2 = T_8$ et $T_4 = T_6$.

Prenons par exemple un intégrateur à deux états caractérisé par $(r_1 > 0)$ et $(r_2 < 0)$ sur lequel nous appliquons le contrôle basé sur les événements ; nous voulons calculer les temps T_2 et T_4 nécessaires pour appliquer le contrôle supérieur, respectivement inférieur. Dans le cas de contrôle supérieur, l'équation (4.5.7) devient :

$$\begin{bmatrix} r_1 - QH_1 & 0 \\ 0 & r_2 - QH_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dT_s^1(x)}{dx} \\ \frac{dT_s^2(x)}{dx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_{12} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & -\lambda_{21} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} T_s^1(x) \\ T_s^2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_0^1 \\ p_0^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.4.1)$$

où la matrice \mathbf{R} est la matrice des taux de variation avec contrôle tel que :

$$\begin{cases} r_1 - QH_1 < 0 \\ r_2 - QH_2 < 0, \end{cases}$$

$T_s^1(x)$ est le temps de séjour dans l'état 1 et $T_s^2(x)$ est le temps de séjour dans l'état 2 quand $x(t) \in [X_H, X_{max}]$; ces temps respectent les conditions aux limites suivantes :

$$T_s^1(X_H) = 0, \quad T_s^2(X_H) = 0$$

En regardant l'automate stochastique hybride que nous l'avons construit pour l'intégrateur à deux états (Figure 2.5) et tenant compte des hypothèses établies dans le Chapitre 2, nous observons que le système peut arriver en X_{max} *seulement* dans un état ayant un taux de variation positif ($r_1 > 0$). Donc les probabilités p_0^1 et p_0^2 pour l'intégrateur à deux états sont :

$$\begin{aligned} p_0^1 &= 1 \\ p_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

Une fois $T_s^1(x)$ et $T_s^2(x)$ calculés, nous pouvons déterminer le temps de contrôle total (le temps que le système passe dans les états avec contrôle supérieur avant d'arriver à X_H) :

$$T_2(x) = T_s^1(x) + T_s^2(x) \quad (5.4.2)$$

La méthode reste valable aussi dans le cas d'application du contrôle inférieure, quand le temps total pour appliquer le contrôle T_4 est calculé comme :

$$T_4(x) = T_i^1(x) + T_i^2(x) \quad (5.4.3)$$

où $T_i^1(x)$ et $T_i^2(x)$ sont les solutions du type (4.5.15) de l'équation (4.5.12) pour l'intégrateur considéré :

$$\begin{bmatrix} r_1 + QL_1 & 0 \\ 0 & r_2 + QL_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dT_i^1(x)}{dx} \\ \frac{dT_i^2(x)}{dx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_{12} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & -\lambda_{21} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} T_i^1(x) \\ T_i^2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_0^1 \\ p_0^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.4.4)$$

Dans le cas de contrôle inférieur, puisque le système ne peut pas arriver à X_{min} que dans un état ayant un taux de variation négatif ($r_2 < 0$), les probabilités p_0^1 et p_0^2 sont :

$$\begin{aligned} p_0^1 &= 0 \\ p_0^2 &= 1 \end{aligned}$$

En ce qui concerne la simulation de ce système, afin de déterminer les temps de contrôle, nous démarrons les simulations directement soit en X_{max} soit en X_{min} et nous calculons les temps nécessaires pour appliquer le contrôle jusqu'à $\{x(t) = X_H\}$, respectivement $\{x(t) = X_H\}$, en moyenne sur les N_r répliques.

Prenons l'ensemble des données que nous avons utilisé pour calculer les temps de sortie de la zone de contrôle (Section 5.2) de ce chapitre :

$$r_1 = 7, r_2 = -4, \lambda_{12} = 9, \lambda_{21} = 5,$$

$$X_{max} = 1, X_{min} = 0, X_H = 0.8, X_L = 0.4, d_{sampl} = 0.01,$$

sur un nombre de $N_r = 500.000$ simulations. Dans la simulation, nous avons appliqué des différentes variables de contrôle, comme représenté dans le Tableau 5.9. Dans ce tableau nous donnons les valeurs des temps de contrôle supérieur et inférieur, obtenus par la méthode analytique, et par la simulation à événements discrets, avec les erreurs correspondantes à la méthode analytique exposée dans cette section. Les erreurs inférieures à 0.16% (0% dans plusieurs cas), nous indiquent que la méthode analytique de calcul pour les temps de contrôle fonctionne pour l'intégrateur à deux états que nous avons considéré.

QH_1	QH_2	QL_1	QL_2	Simulation		Analytique		Erreur	Erreur
				T_2	T_4	T_2	T_4	T_2 [%]	T_4 [%]
12	1	1	12	0.04	0.05	0.04	0.05	0	0
15	2	4	6	0.0258	0.1511	0.0258	0.1512	0	0.06
8	0.5	0.5	5	0.1207	0.2238	0.1209	0.2237	0.16	0.04
10	0.1	0.2	12	0.0625	0.0505	0.0625	0.0505	0	0

TABLE 5.9 – Les temps de contrôle supérieur ($T_2 = T_8$) et inférieur ($T_4 = T_6$) pour diverses paramètres de contrôle.

Si nous considérons un système plus complexe à quatre états, avec $\{r_1 > 0, r_3 > 0\}$ et $\{r_2 < 0, r_4 < 0\}$, qui est caractérisé par un automate stochastique hybride comme celui représenté dans la Figure 4.8, alors nous pouvons appliquer le même raisonnement que dans l'exemple précédent. Rappelons que dans les équations (4.5.7) - (4.5.12), les vecteurs de probabilité $\vec{\pi}_{O_s}, \vec{\pi}_{O_i}$ suivent les définitions que nous avons fourni en (4.5.6) - (4.5.13). Par exemple, pour cet intégrateur commuté à quatre états, le vecteur de probabilité $\vec{\pi}_{O_s}$ prend la forme (4.5.10).

Les paramètres utilisés pour ce système à quatre états sont les suivantes :

- les taux de variation caractéristiques à chaque état $r_1 = 9, r_2 = -4, r_3 = 6, r_4 = -8,$
- les variables de contrôle : $QH_1 = 9.5, QH_2 = 0.5, QH_3 = 7, QH_4 = 0.3, QL_1 = 0.5, QL_2 = 5, QL_3 = 0.2, QL_4 = 9,$
- l'intervalle de contrôle : $X_{max} = 1, X_{min} = 0, X_H = 0.8, X_L = 0.4;$

– le générateur de la chaîne de Markov :

$$Q = \begin{pmatrix} -45 & 16 & 12 & 17 \\ 9 & -20 & 5 & 6 \\ 10 & 12 & -30 & 8 \\ 12 & 13 & 15 & -40 \end{pmatrix}$$

Les simulations ont été réalisées en partant en mode aléatoire selon les vecteurs de probabilité $\vec{\pi}_{O_s}$, respectivement $\vec{\pi}_{O_i}$. Les points de départ X_H et X_L ont été choisis de manière aléatoire aussi, selon les probabilités de départ de ces deux points (calculées a priori sur une durée de simulation, T_f , fixe). Nous avons simulé en total un nombre de $N_r = 50.000$ simulations, pour lesquels nous avons calculé les temps de contrôle comme représenté dans le Tableau 5.10. En regardant les erreurs entre la simulation et la méthode analytique pour ces temps de contrôle, nous observons l'efficacité de la méthode. Les erreurs sont plus grandes que pour l'intégrateur commuté à deux états, mais restent toujours assez faibles (inférieures à 1.12%). Nous pouvons donc confirmer la validité de notre approche analytique.

Temps de contrôle	Simulation	Analytique	Erreurs[%]
$T_2 = T_8$	0.0819	0.0828	1.08
$T_4 = T_6$	0.1409	0.1425	1.12

TABLE 5.10 – Les temps de contrôle supérieur ($T_2 = T_8$) et inférieur ($T_4 = T_6$) pour un intégrateur à quatre états.

Les résultats que nous avons présentés dans cette section nous montrent que modèle analytique pour calculer les temps de contrôle, que nous avons construit dans le Chapitre 4, correspond bien à la simulation. Nous allons utiliser les paramètres de ces deux exemples dans la section suivante, afin de valider les énergies consommées par le système pour appliquer le contrôle basé sur le événements.

5.5 Energies de contrôle

Une fois que nous avons calculé les temps de sortie de la région de contrôle, respectivement les temps de contrôle, nous pouvons déterminer les énergies de contrôle que nous avons présentées dans la Section 4.6. Nous calculons les énergies consommées pour appliquer le contrôlé supérieur ou inférieur dans chaque état (4.6.1) - (4.6.2), respectivement les énergies totales (4.6.3) - (4.6.5). Nous allons donner les résultats pour les deux systèmes que nous avons utilisés dans la Section 5.2 : l'intégrateur à deux états, respectivement à quatre états.

Commençons par l'intégrateur commuté à deux états pour lequel les temps de contrôle respectent les équations (5.4.1) - (5.4.4), les temps de sortie vérifient les équations (5.2.10) - (5.2.11), et les probabilités de scénarios les équations (4.2.7) - (4.2.10). Nous rappelons que ces paramètres ont été déjà validés dans les sections précédentes (sections 5.2, 5.3 et 5.4).

Energies de contrôle	Simulation	Analytique	Erreurs [%]
e_1^1 voir (4.6.1)	5.1278	5.1280	0.005
e_1^2	0.0001	0.0001	0
e_2^1 voir (4.6.2)	0.0002	0.0002	0
e_2^2	6.4911	6.4873	0.058
En_{tot} voir (4.6.6)	11.6192	11.6158	0.02

TABLE 5.11 – Les énergies de contrôle pour un intégrateur à deux états.

Energies de contrôle	Simulation	Analytique	Erreurs [%]
e_1^1 voir (4.6.1)	2.1607	2.1552	4.77
e_1^2	0.0047	0.0046	0.4
e_1^3	1.5068	1.603	6.00
e_1^4	0.0008	0.00079	1.25
e_2^1 voir (4.6.2)	0.0043	0.0043	0
e_2^2	1.7243	1.8667	7.62
e_2^3	0.0009	0.00087	3.33
e_2^4	2.6413	2.3785	9.94
En_{tot} voir (4.6.6)	8.0282	7.9117	1.45

TABLE 5.12 – Les énergies de contrôle pour un intégrateur à quatre états.

Dans le Tableau 5.11 nous présentons les résultats numériques de la simulation ($N_r = 50.000$ simulations) et de la méthode analytique proposée dans la Section 4.6. Les erreurs numériques faibles (moins de 0.06%) nous confirment que la méthode pour l'intégrateur commuté à deux états fonctionne.

Nous continuons les vérifications aussi pour des systèmes aux états multiples, plus spécifiquement pour l'intégrateur commuté à quatre états que nous avons étudié dans la Section 5.2. Nous avons constaté que si le nombre d'états augmente, des erreurs plus élevées peuvent apparaître dans le calcul des énergies consommées pour appliquer le contrôle en chaque état. Par contre, au niveau de l'énergie totale consommée pour appliquer le contrôle, les erreurs restent inférieures à 1.45%.

En effet, dans la méthode analytique, les probabilités de sortie caractéristiques à chaque état prend des valeurs très petites et doivent être vérifiées avec un nombre des simulations considérablement plus grand (on n'a pas la garantie dans ces cas que les

résultats de la simulation sont précis).

Dans cette section nous avons fermé la boucle des résultats numériques qui font la comparaison entre l'approche analytique et la simulation des intégrateurs stochastiques à commutation. Ces derniers résultats des énergies consommées pour appliquer le contrôle, nous permet de déterminer le dernier paramètre ($u^2(t)$) du coût quadratique de performance, défini dans la Section 4.1.

5.6 Coût quadratique total

Une fois que toutes les paramètres des sections précédentes ont été calculées (l'énergie consommée pour appliquer le contrôle, et le moment d'ordre 2 de la variable d'état), nous pouvons calculer le coût quadratique total (4.1.1) que nous avons défini dans le Chapitre 4. Afin de comparer les coûts obtenus par la simulation, respectivement par la méthode analytique, nous considérons deux intégrateurs stochastiques à commutation à deux états, avec les paramètres qui sont donnés dans le Tableau 5.13.

Nr	r_1	r_2	λ_{12}	λ_{21}	$[X_{min}, X_{max}]$	$[X_L, X_H]$	QH_1	QH_2	QL_1	QL_2
1	3	-2	0.4	0.6	$[-10, 10]$	$[-5, 5]$	4	1	1	3
2	5	-6	0.6	0.7	$[-20, 20]$	$[-10, 10]$	6	1	1	7

TABLE 5.13 – Les paramètres des deux intégrateurs à deux états considérés.

Si nous calculons le coût quadratique total en utilisant les méthodes analytiques que nous avons présentées dans le Chapitre 4, et le coût de performance en appliquant la méthode de simulation présentée dans le Chapitre 3 ($N_r = 50.000$ simulations, avec $d_s = 0.01$), nous obtenons les résultats numériques du Tableau 5.14, avec les constantes $q = 1, r = 2$.

Nr	Simulation	Analytique	Erreurs [%]
1	107.5904	107.7127	0.11
2	239.6229	240.5909	0.40

TABLE 5.14 – Coût quadratique pour les intégrateurs à deux états.

Les faibles erreurs constatées pour ces deux exemples de systèmes (inférieures à 0.4%), représentent une validation des résultats obtenus pour les intégrateurs stochastiques à deux états. Par contre, comme déjà remarqué dans la section précédente, pour les intégrateurs à plusieurs états, des erreurs plus grandes peuvent apparaître dans le calcul des énergies de contrôle, qui vont influencer aussi les coûts quadratiques totaux. Cet

aspect intervient dans les perspectives de notre travail car nous envisageons l'application d'une commande optimale pour minimiser l'énergie consommée quand le contrôle basé sur les événements est appliqué.

5.7 Problèmes numériques

A travers nos études, plus spécifiquement dans l'étape de validation des résultats analytiques, nous avons rencontré, pour certains choix de paramètres du système, des problèmes d'ordre numérique. Ces problèmes apparaissent en général dans le calcul des temps de sortie d'une région de contrôle (4.3.9)-(4.3.10), qui dépendent de la matrice $\mathbf{W} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T$. Comme la matrice \mathbf{Q} est singulière, \mathbf{W} est aussi singulière, donc mal conditionnée, ce qui va influencer les termes exponentiels des solutions obtenues. En revanche, ces erreurs apparaissent seulement dans le calcul des temps de contrôle, quand des zones de contrôle trop grandes sont appliquées.

Dans cette section nous donnons un exemple de système pour lequel la zone de contrôle appliquée est significativement plus grande que dans le cas précédent. Soit l'intégrateur à commutation à deux états, caractérisé par les paramètres suivants :

$$r_1 = 5, r_2 = -8, \lambda_{12} = 0.4, \lambda_{21} = 0.7,$$

$$QH_1 = 6, QH_2 = 0.5, QL_1 = 0.5, QL_2 = 9$$

$$X_{max} = 1000, X_{min} = -1000, X_H = 200, X_L = -200, d_{sampl} = 1.$$

La comparaison des résultats avec la simulation nous a montré qu'au niveau des probabilités de sortie, des temps de sortie de la zone de contrôle ou des temps de sortie caractéristiques à chaque état j , nous avons obtenu de bons résultats. Dans le Tableau 5.15 nous observons que les temps totaux passés dans la chaîne de Markov avant d'arriver aux limites, correspondent aux temps de sortie dans la simulation, avec une erreur faible, inférieure à 0.55%.

Analytique	Simulation	Erreurs[%]
$T_{tot}(X_H) = 2948$	$T_{sim}^{X_H} = 2931.77$	0.55
$T_{tot}(X_L) = 4398$	$T_{sim}^{X_L} = 4392.37$	0.12

TABLE 5.15 – Les temps totaux de sortie vers X_{max}, X_{min} pour un intégrateur exception.

Par contre, au niveau des temps de contrôle, nous avons obtenus des erreurs numériques plus grandes, comme présenté dans le Tableau 5.16. Ces erreurs sur les temps de contrôle vont aussi influencer les énergies calculées pour appliquer le contrôle.

	Analytique	Simulation	Erreurs[%]
T_2	139.7	216.0	35.34
T_4	304.62	202.87	33.40

TABLE 5.16 – Temps de contrôle les zones $[X_{min}, X_L] = [-1000, -200]$, $[X_H, X_{max}] = [200, 1000]$.

Cet aspect nous mène à approfondir les études sur le comportement des systèmes stochastiques à commutation quand le contrôle basé sur les événements est appliqué. Nous aurons besoin d'étudier et approfondir les méthodes numériques de calcul de l'exponentielle, et trouver une solution de calcul appropriée aux besoins du système. Les dernières études nous donnent la possibilité d'envisager des nouvelles perspectives aussi au niveau de l'application du contrôle et de l'optimisation des méthodes proposées.

5.8 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons présenté une comparaison des résultats numériques que nous avons obtenus dans le modèle probabiliste (construit dans le Chapitre 4), et dans la simulation à événements discrets proposée dans le Chapitre 3. Une première partie était dédiée à la vérification des moments de performabilité d'ordre 1 et 2 (Section 5.1), suivie par les résultats numériques des probabilités et des temps de sortie de la région de contrôle (Section 5.2). Les temps de séjour dans la chaîne de Markov avant d'arriver aux limites ont été vérifiés dans la Section 5.3, qui nous a permis aussi de valider les temps nécessaires pour appliquer le contrôle dans la Section 5.4. La dernière partie de ce chapitre a été réservée au calcul des énergies consommées pour appliquer le contrôle basé sur les événements (Section 5.5) et aux problèmes numériques que nous avons rencontrés dans notre travail (Section 5.7).

Conclusions générales

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse entre dans le cadre général de la modélisation et de la simulation des systèmes stochastiques à commutation avec un contrôle basé sur les événements. Le comportement aléatoire des systèmes stochastiques à commutation est influencé par des événements incontrôlables, des défaillances de fonctionnement ou des commutations brusques entre divers états de fonctionnement. Cet aspect rend l'analyse analytique difficile. Également, la simulation d'un tel comportement aléatoire nécessite un traitement statistique des résultats, sur un grand nombre de simulations, afin de calculer les valeurs moyennes des paramètres de performance. La synthèse de la commande de tels systèmes reste une tâche ardue qui peut être réalisée seulement sous certaines hypothèses.

Dans le premier chapitre nous avons défini les notions générales des systèmes stochastiques à commutation et leurs caractéristiques hybrides. Les commutations aléatoires entre les états du système nous ont permis d'introduire les définitions de chaînes de Markov avec des taux de variation, utilisées pour la modélisation. L'utilisation des automates stochastiques hybrides nous permet d'avoir une représentation graphique de ce type de systèmes. Dans ce chapitre nous avons également présenté les notions générales sur le contrôle basé sur les événements que nous avons appliqué au système. Un exemple de modèle de système stochastique à commutation a été fourni à la fin de ce chapitre.

Le modèle principal que nous avons utilisé dans nos études est un intégrateur stochastique à commutation, à plusieurs états. Nous avons présenté ce système dans le deuxième chapitre de ce mémoire, avec les hypothèses de travail et la manière d'appliquer le contrôle basé sur les événements. Le modèle fourni est caractérisé à l'aide de chaînes de Markov avec des taux de variation de signes différents associées à chaque état.

Les contributions originales de notre travail sont présentées dans les chapitres 3 et 4.

Nous avons d'abord proposé une méthode de simulation dans le troisième chapitre qui peut servir comme un benchmark pour les modèles analytiques. Le simulateur peut-être utilisé pour calculer le paramétrage optimal de la commande permettant de minimiser l'énergie consommée quand le contrôle basé sur les événements est appliqué. L'algorithme

de simulation contient plusieurs étapes qui correspondent aux étapes de la simulation à événements discrets classique :

- l’initialisation des paramètres du système,
- le choix aléatoire de l’événement suivant à partir d’une liste des événements possibles,
- la mise à jour des changements dans le système (provoqués par l’événement choisi),
- le calcul des statistiques et
- le calcul des paramètres de sortie dont nous avons besoin (énergies, variables d’état moyenne, etc.).

La principale contribution de notre travail est présentée dans le quatrième chapitre. Elle est représentée par la construction du modèle probabiliste d’énergie stationnaire, qui contient plusieurs méthodes analytiques. Ces méthodes sont utilisées pour déterminer les paramètres dont nous avons besoin pour calculer le critère quadratique de performance du système. En utilisant quatre scénarios possibles d’évolution, ces méthodes ont été réalisées afin de calculer :

- les probabilités de sortie de la zone de contrôle spécifiques à chaque état,
- les temps de sortie vers une limite spécifique de la zone de contrôle,
- les temps d’atteindre soit la limite maximale soit la limite minimale, caractéristiques à chaque état,
- les temps pour appliquer le contrôle, et finalement
- les énergies consommées pour appliquer le contrôle.

Dans le dernier chapitre, nous avons réalisé la comparaison de ces méthodes analytiques et de la simulation, proposée dans le troisième chapitre. Les résultats numériques sont obtenus pour un intégrateur stochastique à commutation à deux états, respectivement à quatre états, avec des taux de variation de signes différents, sur un grand nombre de simulations. Les faibles erreurs obtenues entre les résultats, nous permettent de valider les approches analytiques et le raisonnement que nous avons effectués.

Malgré une bonne précision de calcul constatée globalement dans toutes les méthodes proposées, nous avons rencontré des problèmes numériques pour certains jeux de paramètres, notamment au niveau du calcul des temps nécessaires pour appliquer le contrôle (dans des zones de contrôle très grandes par rapport à l’évolution du système). Ces constats motivent nos démarches de recherche visant à améliorer la méthode numérique du calcul de ces paramètres. Quand la zone de contrôle est très grande, les solutions analytiques des temps de contrôle, qui dépendent des matrices singulières (donc mal conditionnées) vont générer des termes exponentiels grands, mal approximés par les outils de calcul (Matlab, Maple, etc).

Cet aspect représente une perspective à court terme de notre travail, pour laquelle nous construisons une méthode d’approximation qui évitera le calcul des exponentielles de matrices. Les approximations sur lesquelles nous travaillons demandent une division de l’espace d’état du système, en fonction des signes des taux de variation caractéristiques

aux états : positifs et négatifs. Une première démarche a été déjà faite afin de calculer les probabilités de sortie ainsi que les temps de sortie de la zone de contrôle.

Sur le long terme notre objectif est la synthèse de la commande optimale pour le système que nous avons considéré, qui sera vérifiée par la méthode de simulation à événements discrets que nous avons proposée. Un troisième centre d'intérêt se concentre sur une généralisation de l'approche pour une classe plus complexe de systèmes stochastiques à commutation, sur laquelle nous appliquons le contrôle basé sur les événements d'une manière optimale.

Bibliographie

- Altman, E. & Gaitsgory, V. [1997], ‘Asymptotic optimization of a nonlinear hybrid system governed by a markov decision process’, *SIAM Journal of Control and Optimization* **35(6)**, 2070 – 2085.
- Alur, R., Courcoubetis, C., Halbasachs, N., Henzinger, T., Ho, P., Nicollin, X., Olivero, A., Sifakis, J. & Yovine, S. [1995], ‘The algorithmic analysis of hybrid systems’, *Theoretical Computer Science* **138**, 3–34.
- Amonlirdviman, K., Khare, N., Tree, D., Chen, W., Axelrod, J. & Tomlin, C. [2005], ‘Mathematical modeling of planar cell polarity to understand domineering nonautonomy’, *Science* **307**, 423–426.
- Anick, D., Mitra, D. & Sondhi, M. [1982], ‘Stochastic theory of a data-handling system with multiple sources’, *The Bell System Technical Journal* **61**, 1871–1894.
- Arzen, K. [1999], ‘A simple event-based pid controller’, *Proceedings of the 14th IFAC WORLD Congress* .
- Åström, K. [2008], Event based control, *in* A. Astolfi & L. Marconi, eds, ‘Analysis and Design of Nonlinear Control Systems’, Vol. 3, Springer, Berlin, pp. 127–147.
- Åström, K. & Bernahardsson, B. [2002], ‘Comparison of riemann and lebesgue sampling for first order stochastic systems’, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control* .
- Balluchi, A., Benvenuti, L., Benedetto, M., Miconi, G., Pozzi, U., Villa, T., Wong-Toi, H. & Sangiovanni-Vicentelli, A. [2000], Maximal safe set computation for idle control of an automotive engine, *in* ‘Hybrid Systems Computation and Control’, Vol. 1790, Springer, pp. 32 – 44.
- Basak, G., Bisi, A. & Ghosh, M. [1996], ‘Ergodic control of random singular diffusions’, *IEEE Conference on Decision and Control* pp. 2545 – 2550.
- Bensoussan, A. & Menaldi, J. [2000], ‘Stochastic hybrid control’, *J. Math. Analysis and Applications* **249**, 261–268.
- Bohacek, S. & Hespanha, J. [2003], ‘A hybrid systems modeling framework for fast and accurate simulation of data communication networks’, *Proc. of ACM Intl. Conf. on Measurements and Modeling of Computer Systems SIGMETRICS* .

- Bolch, G. [2006], *Queueing Networks and Markov Chain*, Hoboken, NJ.
- Boukas, E. [2004], *Stochastic Switching Systems Analysis and Design*, Springer Basel AG.
- Brandejsky, A., Saporta, B. D. & Dufour, F. [2012], ‘Numerical methods for the exit time of a piecewise-deterministic markov process’, *Adv. in Appl. Probab.* **44(1)**, 196–225.
- Cassandras, C. G. [2008], Stochastic flow systems : Modeling and sensitivity analysis, in C. G. Cassandras & J. Lygeros, eds, ‘Stochastic Hybrid Systems’, Taylor and Francis, New York, chapter 6, pp. 139–164.
- Cassandras, C. G. & Lygeros, J. [2007], *Stochastic Hybrid Systems(Automation and Control Engineering)*, Taylor and Francis, New York.
- Cassandras, C. & Lafortune, S. [1999], *Introduction to Discrete Event Systèms*, Kuzer Academic Publishers.
- Cassandras, C. & Lygeros, J. [2006], *Stochastic Hybrid Systems*, Vol. 24, CRC Press and IEEE Press.
- Chen, Y. & Provan, G. [1997], ‘Modeling and diagnosis of timed discrete event systems a factory automation example’, *The American Control Conference New Mexico* p. 31–36.
- Cogill, R., Lall, S. & Hespanha, J. [2007], ‘A constant factor approximation algorithm for optimal estimation subject to communication costs’, *Proceedings of the 2007 American Control Conference* .
- Davis, M. [1985], ‘Piecewise-deterministic markov processes : A general class of non-diffusion stochastic models’, *J.R.Statist. Soc.B* **46(3)**, 353–388.
- Davis, M. [1993], *Markov Models and Optimization*, Chapman and Hall, London.
- Foata, D. & Fuchs, A. [2003], *Calcul des probabilités - Cours, exercices et problèmes corrigés*, Dunod.
- Gardiner, C. [2004], *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences*, 3 edn, Springer, Berlin.
- Ghosh, M., Arapostathis, A. & Marcus, S. [1997], ‘Ergodic control of switching diffusions’, *SIAM J. Control Optimization* **35**, 1952–1988.
- Gibson, M. & Bruck, J. [2000], ‘Efficient exact stochastic simulation chemical systems with many species and many channels’, *J. Phys. Chem.* **104(9)**, 1876–1889.
- Gupta, V. & Murray, R. [2010], ‘Networked sensing, estimation and control systems’.
- Heemels, W., Gorter, R., van Zijl, A., van den Bosch, P., Weiland, S. & Hendrix, W. [1999], ‘Asynchronous measurement and control : A case study on motor synchronization’, *Control Engineering Practice* pp. 1467–1482.
- Heemels, W., Sandee, J. & van den Bosch, P. [2007], ‘Analysis of event-driven controllers for linear systems’, *International Journal of Control* **81(4)**, 571–590.

- Henningsson, T., Johansson, E. & Cervin, A. [2008], ‘Sporadic event-based control of first-order linear stochastic systems’, *Automatica* **44**, 2890–2895.
- Henzinger, T. [1996], ‘The theory of hybrid automata’, *Hybrid Systems II, LNCS* **999**, 278–292.
- Hespanha, J. [2004], ‘Uniform stability of switched linear systems : Extensions of lasalle’s invariance principle’, *IEEE Trans. Automat. Control* **49**, 470–482.
- Hespanha, J. [2005], Polynomial stochastic hybrid systems, in M. Morari, L. Tchiele & F. Rossi, eds, ‘Hybrid Systems : Computation and Control’, Vol. 3414, Springer Verlag, Berlin, pp. 322–338.
- Higham, D., Mao, X., Roj, M., Song, Q. & Yin, G. [2011], Determining buffer size requirements using stochastic approximations methods, Technical report, Department of Mathematics and Statistics, University of Strathclyde, Glasgow.
- Hu, J., Wu, W. & Sastry, S. [2004], Modeling subtilin production in bacillus subtilis using stochastic hybrid systems, in ‘Hybrid Systems Computation and Control’, Springer, pp. 417 – 31.
- Iyer, B., Donatiello, L. & Heidelberger, P. [1986], ‘Analysis of performability for stochastic models of fault-tolerant systems’, *IEEE Transactions on Computers* **35(10)**, 902–907.
- Jacod, J. & Skorokhod, A. [1996], ‘Jumping markov processes’, *Ann.Instit. Henri Poincaré* **32(1)**, 11–67.
- Kobyashi, H. & Ren, Q. [1992], ‘A mathematical theory for transient analysis of communication networks’, *IEICE Transactions on Communications* **6E75-B**, 1266–1276.
- Kushner, H. [1967], *Stochastic Stability and Control*, Academic Press NY.
- Kwon, W., Kim, Y., Lee, S. & Paek, K. [1999], ‘Event-based modeling and control for the burnthrough in sintering control’, *IEEE Transactions on Contr. Systems Tech.* **7(1)**, 31–41.
- Lefebvre, M. [2011], ‘Maximizing the mean exit time of a brownian motion from an interval’, *International Journal of Stochastic Analysis* **2011**.
- Liberzon, D. [2003], *Switching in systems and control*, Boston : Birkhäuser.
- Lygeros, J. [1999], *Hybrid systems : modeling, analysis and control*, preprint.
- Mariton, M. [1990], *Jump linear Systems in Automatic Control*, Marcel Dekker New York.
- Masoliver, J., MonteroandJ, M. & Perelló, J. [2005], ‘The ctrws in finance : the mean exit time’, *Practical Fruits of Econophysics* .
- Meyer, J. [1989], ‘On evaluating the performability of degradable computing systems’, *Comm.Statist. Stochastic Models* **5(4)**, 683–710.

- Montero, M., Perello, J., Masoliver, J., Lillo, F., Micciche, S. & Mantegna, R. [2005], ‘Scaling and data collapse for the mean exit time of asset prices’, *Physical Review E* **72**(5).
- Otanez, P., Moyne, J. & Tilbury, D. [2002], ‘Using deadbands to reduce communication in networked control systems’, *In Proc. of American control conf., Anchorage* pp. 3015–3020.
- Perez-Castaneda, G., Aubry, J. & Brinzei, N. [2009], ‘Simulation de monte carlo par automate stochastique hybride, application a un cas test pour la fiabilité dynamique’, *8ème Congrès International en Qualité et Sûreté de Fonctionnement, Besançon, France* .
- Petterson, B. [1969], ‘Production control of a complex integrated pulp and paper mill’, *Tappi* **52**(11), 2155–2159.
- Petterson, J., Ledung, L. & Zhang, X. [2006], ‘Decision support for pulp mill operations based on large-scale optimization’, *Control Systems* .
- Pola, G., Bujorianu, M., Lygeros, J. & di Benedetto, M. [2003], ‘Stochastic hybrid models : An overview’, *Proceed. IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems* .
- Rao, M. & Swift, R. [2006], *Probability theory with applications*, Springer.
- Rácz, S. & Telek, M. [1999], ‘Performability analysis of markov reward models with rate and impulse reward’, *Int. Conf. on Numerical solution of Markov chains* .
- Reibman, A. & Trivedi, K. [1989], ‘Transient analysis of cumulative measures of markov behavior’, *Comm.Statist. Stochastic Models* **5**(4), 683–710.
- Royer, A. [2006], Évaluation de performances de réseaux de communication á l’aide de chaînes de Markov Hybride, Phd thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Salis, H. & Kaznessis, Y. [2005], ‘Accurate hybrid stochastic simulation of a system of coupled chemical or biochemical reactions’, *J. Chem. Phys.* **122**(5), 54 – 103.
- Shaft, A. & Schumacher, H. [2000], *An introduction to Dynamical Systèms*, Springer Verlag London.
- Suri, R. & Fu, B. [1991], ‘On using continuous flow lines for performance estimation of discrete production lines’, *Proc. of 1991 Winter Simulation Conference, Piscataway; NJ* pp. 969–977.
- Tomlin, C., Pappas, G. & Sastry, S. [1998], ‘Conflict resolution for air traffic management : A study in multi-agent hybrid systems’, *IEEE Trans. on Automatic Control* pp. 509–521.
- Trivedi, K. [2001], *Probability and Statistics with Reliability, Queuing, and Computer Science Applications*, Wiley, John and Sons, Incorporated.

- Trivedi, K., Malhotra, M. & Fricks, R. [1994], 'Markov reward approach to performability and reliability analysis', *IEEE Computer Society Washington DC*.
- Tsai, C. [1998], 'Composite stabilization of singularly perturbed stochastic hybrid systems', *International Journal of Control* **71**(6), 1005 – 1020.
- Varaiya, P. [1993], 'Smart cars on smart roads : problems of control', *IEEE Trans. on Automatic Control* pp. 195–207.
- Viswanadham, N., Pattipati, K. & Gopalakrishna, V. [1995], 'Performability studies of automated manufacturing systems with multiple part types', *IEEE Transactions on Robotics And Automation* **11**(5), 692–709.
- Wei, K., Tsao, Q. & Otto, N. [1989], Determining buffer size requirements using stochastic approximations methods, Research Report SR-89-73, Ford.
- Yamamoto, Y. [1996], 'A retrospective view on sampled-data control systems', *Quarterly* **9**(3), 261–276.
- Yu, H. & Cassandras, C. [2004], 'Perturbation analysis for production control and optimization of manufacturing systems', *Automatica* **40**, 945–956.

