

---

# Simulation à événements discrets en temps continu pour la commande orientée événements des systèmes stochastiques à commutation

## Modélisation, contrôle et simulation des systèmes stochastiques à commutation

Simona Mihaita\* — Stéphane Mocanu\*\*

Gipsa -lab UMR 5216

961 rue de la Houille Blanche BP 46 F - 38402 GRENOBLE Cedex

\* [Adriana-Simona.Mihaita@gipsa-lab.grenoble-inp.fr](mailto:Adriana-Simona.Mihaita@gipsa-lab.grenoble-inp.fr)

\*\* [Stephane.Mocanu@gipsa-lab.grenoble-inp.fr](mailto:Stephane.Mocanu@gipsa-lab.grenoble-inp.fr)

---

*RÉSUMÉ.* Cet article présente la simulation en temps continu des systèmes stochastiques à commutation avec un contrôle basé sur les événements. Le modèle utilisé est un intégrateur commuté avec des états multiples, caractérisé par une chaîne de Markov en temps continu. L'objectif principal est de maintenir la variable d'état du système dans les limites imposées. Des limites pour arrêter le contrôle ont été aussi considérées durant la simulation. Finalement on présente les résultats obtenus pour minimiser un critère quadratique d'énergie en appliquant le contrôle basé sur les événements.

*ABSTRACT.* This paper presents a continuous time simulation method for stochastic switching systems while applying event-based control. The main system we have used is a multi-state integrator having a switching behavior, being described by a continuous-time Markov Chain. The objective of the event-based control method is to maintain the continuous system state variable between extreme limits. Control stopping limits have also been taken into consideration. Finally we present the results we have obtained in order to minimize a quadratic energy cost while applying event-based control.

*MOTS-CLÉS :* systèmes stochastiques à commutation, contrôle basé sur les événements

*KEYWORDS:* stochastic switching systems, event-based control

---

## 1. Introduction

Pendant les dernières années les systèmes stochastiques à commutation ont été utilisés comme une méthode spéciale de modélisation pour les systèmes dynamiques, en raison de leur comportement dual : continu et discret. Ces *systèmes stochastiques à commutation* ont été utilisés pour les systèmes de transport (Pola *et al.*, 2003) - (Tomlin *et al.*, 1998), les systèmes de route automatisés (Varaiya, 1993), les réseaux de communication (Hespanha, 2005), dans la robotique (Egerstedt, 2000), pour les systèmes automobiles (Balluchi *et al.*, 2000) et aussi pour les systèmes biologiques (Khare *et al.*, 2005). La commutation entre les états est représentée par des chaînes de Markov en temps continu avec des valeurs dans un espace d'état fini. On peut modéliser les systèmes stochastiques à commutation en utilisant des équations différentielles (Liberzon, 2003) :

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(t, x(t), u(t)), t \geq 0,$$

avec  $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$  le signal de commutation (une fonction constante par morceaux avec un nombre dénombrable de discontinuités),  $x(t) \in \mathbb{R}_n$  la composante continue de l'état qui a des valeurs réelles et  $u(t) \in \mathbb{R}_n$  la commande de contrôle appliquée sur le système. Le signal de commutation  $\sigma$  sélectionne la dynamique du système à chaque instant temporel  $t$ .

Malgré leur flexibilité de modélisation, les systèmes stochastiques à commutation sont plus difficiles à analyser : des solutions analytiques sont difficiles à obtenir et peu d'algorithmes pour la simulation numérique existent. La simulation numérique est une technique d'analyse puissante mais les méthodes de simulation doivent être soigneusement choisies pour obtenir des résultats précis. Des différentes techniques de simulation ont été développées pour les systèmes industriels (Wei *et al.*, 1989), les systèmes chimiques (Gibson *et al.*, 2000), les réseaux génétiques (Hu *et al.*, 2004), les systèmes biochimiques (Salis *et al.*, 2005); ainsi des algorithmes numériques pour l'analyse d'accessibilité des systèmes stochastiques hybrides sont fournis dans (Cassandras *et al.*, 2007).

Un algorithme efficace de simulation pour évaluer le niveau d'exécution des lignes de production a été développé par (Suri *et al.*, 1991). Cet algorithme a été également appliqué par (Royer, 2006) pour la simulation en temps continu du trafic des paquets dans les réseaux de communication. A partir de cet algorithme, nous avons dérivé un algorithme de simulation en temps continu pour une famille des systèmes stochastiques à commutation aléatoire, sur lesquels est appliqué le contrôle basé sur des événements. On considère le *contrôle basé sur les événements* comme une méthode de contrôle appropriée pour le système que nous utilisons. Appliquer la commande seulement quand il est nécessaire et jusqu'à ce que certaines conditions sont remplies, permet de simplifier grandement le système de capteurs qui équipent le procédé (seulement une détection de seuil est nécessaire à la place d'un échantillonnage continu). Également, en (Åström, 2002) il a été prouvé que pour certains types de systèmes la commande basée sur les événements permet de réduire l'énergie totale du système par rapport à la commande basée sur l'échantillonnage périodique (bien que, une preuve

générale n'a pas été fournie). Cette méthode d'action sur le système seulement quand certains événements apparaissent est devenue une approche intéressante pour résoudre les problèmes de contrôle dans les services de santé, les réseaux de transport, les systèmes industriels (Pettersson *et al.*, 2006), ou les systèmes biologiques (Wilson, 1999). Malheureusement il y a peu de théorie sur la conception d'un contrôleur basé sur les événements (Åström, 2002), (Kofman *et al.*, 2006), (Tabuada, 2007) et souvent le problème peut être traité comme un processus Markovien de décision.

Le modèle du système que nous employons est décrit dans la section suivante. L'algorithme de simulation en temps continu avec le contrôle basé sur les événements est présenté dans la Section 3. Un cas d'étude est fourni dans la Section 4.

## 2. Modèle principal

Le modèle principal que nous utilisons est un type particulier de système à commutation stochastique avec des taux de variation constants associés à la variable continue. On appelle ce système un intégrateur à commutation avec un comportement hybride (continu et discret) pour lequel on applique un contrôle basé sur les événements.

### 2.1. Intégrateur commuté non contrôlé

Pour décrire l'intégrateur stochastique à commutation non contrôlé on utilise les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_{Z(t)} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad [1]$$

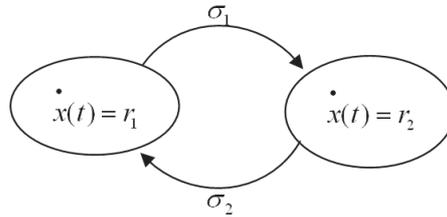
avec  $x(t)$  la variable d'état,  $x_0 \in \mathfrak{R}$  l'état initial du système,  $Z(t)$  le mode du système à l'instant  $t$  avec des valeurs aléatoires dans l'espace d'état fini  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ , et  $r_{Z(t)}$  les taux constants de variation de la variable continue  $x(t)$  de tel sorte que  $r_i > 0, \forall i \in \{1, \dots, M\}$ , et  $r_j < 0, \forall j \in \{M + 1, \dots, N\}$ . On associe au système ci-dessus une chaîne de Markov en temps continu, qui est représentée par la matrice de taux de transition suivante :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\sum_{j \neq 1} \lambda_{1,j} & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,N} \\ \lambda_{2,1} & -\sum_{j \neq 2} \lambda_{2,j} & \dots & \lambda_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{N,1} & \lambda_{N,2} & \dots & -\sum_{j \neq N} \lambda_{N,j} \end{pmatrix}$$

avec  $\lambda_{i,j}$  le taux de transition entre l'état  $i$  et l'état  $j$ . De plus, la probabilité de transition entre  $i$  et  $j$  est  $p_{i,j} = \lambda_{i,j} / \sum_{j \neq i} \lambda_{i,j}$ .

Un intégrateur stochastique à commutation à deux états avec les taux d'évolution de la variable continue  $r_1 > 0, r_2 < 0$  est représenté dans la Figure 1. En utilisant les notations de (Cassandras, 2008), on note  $\sigma_1$  l'événement de transition entre l'état 1 et

l'état 2 après une période de transition aléatoire qui dépend du taux de transition  $\lambda$ , et  $\sigma_2$  l'événement de transition entre l'état 2 et l'état 1 après une période de transition aléatoire qui dépend du taux de transition  $\mu$ . Pour ce système, quand certaines conditions sont remplies, un type particulier de contrôle est considérée, qui est le contrôle basé sur les événements.



**Figure 1.** Représentation stochastique hybride pour l'intégrateur à commutation non contrôlé à deux états

## 2.2. Contrôle basé sur les événements pour l'intégrateur à commutation

Le contrôle basé sur les événements est souvent considéré comme une approche naturelle pour des nombreux systèmes à commutation parce qu'il réagit rapidement aux perturbations, avec des bonnes performances. En (Åström, 2002) il a été montré, pour quelques exemples, que ce type de contrôle peut être appliqué à des systèmes avec plusieurs périodes d'échantillonnage, à des systèmes distribués et à retards qui rendent les systèmes classiques de données échantillonnées difficiles à étudier. Relativement peu des résultats analytiques ont été publiés sur le contrôle basé sur les événements. Récemment un problème très similaire a été traité en (de Saporta *et al.*, n.d.a; de Saporta *et al.*, n.d.b) par des approches numériques. Notre but est de proposer un simulateur des systèmes commutés à événements discrets qui peut être utilisé comme référence et benchmark pour les méthodes analytiques et numériques. Nous adoptons un contrôleur basé sur les événements que nous considérons qui exploite les événements définis par les objectifs de commande du système stochastique à commutation étudié.

L'objectif principal est de maintenir la variable d'état de système entre des limites :  $x(t) \in [X_{min}, X_{max}]$  en utilisant une énergie minimale. Afin de définir l'objectif de minimisation d'énergie on utilise le critère de coût quadratique suivant :

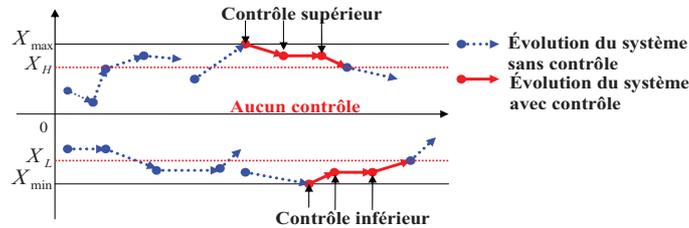
$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \int_0^T [q \cdot x^2(t) + r \cdot u^2(t)] dt \right), q, r > 0. \quad [2]$$

Le choix de ce critère quadratique sera justifié à la fin de cette section.

Chaque fois qu'une des limites a été atteinte, le contrôle sera appliqué jusqu'à ce que  $x(t)$  atteindra l'une des limites d'arrêt du contrôle  $X_H$ , ou  $X_L$ . Nous no-

tons *contrôle supérieur* le contrôle appliqué dans la zone supérieure ( $X_H, X_{max}$ ] et *contrôle inférieur* le contrôle appliqué dans la zone inférieure [ $X_{min}, X_L$ ). La figure 2 représente des trajectoires de l'intégrateur à commutation, avec ou sans le contrôle basé sur les événements, qui correspondent à la description suivante de l'évolution du système :

- *aucun contrôle* est appliqué si :
  - la variable d'état  $x(t)$  est dans la zone sans contrôle : [ $X_L, X_H$ ] ou
  - la variable d'état est dans l'intervalle supérieur de contrôle ( $X_H, X_{max}$ ) et aucun contrôle n'a été nécessaire avant l'instant  $t$  ou
  - la variable d'état est dans l'intervalle inférieur de contrôle ( $X_{min}, X_L$ ) et aucun contrôle n'a été nécessaire avant l'instant  $t$  ;
- le *contrôle supérieur* est appliqué si la limite maximale a été atteinte ( $x(t) = X_{max}$ ) ou si le vecteur d'état est toujours dans l'intervalle supérieur de contrôle même si le contrôle a été appliqué avant l'instant  $t$  ; ce qui signifie que le contrôle sera appliqué jusqu'à ce que  $x(t) = X_H$  ;
- le *contrôle inférieur* est appliqué si la limite minimale a été atteinte ( $x(t) = X_{min}$ ) ou si le vecteur d'état est toujours dans l'intervalle inférieur de contrôle même si le contrôle a été appliqué avant l'instant  $t$  ; ce qui signifie que le contrôle sera appliqué jusqu'à ce que  $x(t) = X_L$ .



**Figure 2.** Trajectoires possibles de l'intégrateur à commutation avec contrôle

Tenant compte des spécifications mentionnées, l'équation différentielle pour le système contrôlé [1] devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_{Z(t)} + u_{Z(t)}(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad [3]$$

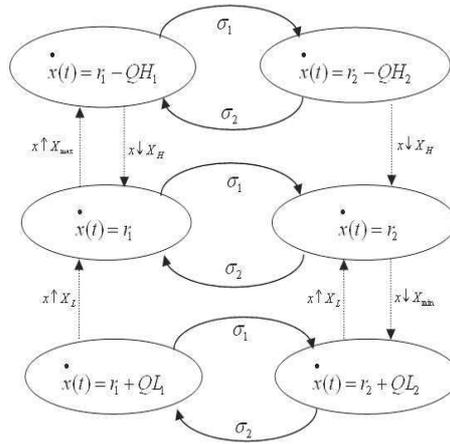
avec

$$u_{Z(t)}(x(t)) = \begin{cases} 0 & ,\text{si } C_1 \\ -QH_l & ,\text{si } C_2, \forall l \in \{1, 2..N\} \\ +QL_m & ,\text{si } C_3, \forall m \in \{1, 2..N\} \end{cases} \quad [4]$$

$$\begin{cases} C_1 : & (x(t) \in [X_L, X_H]) \vee \\ & (x(t) \in (X_H, X_{max}) \wedge u(Z(t - \Delta t)) = 0) \vee \\ & (x(t) \in (X_{min}, X_L) \wedge u(Z(t - \Delta t)) = 0) \\ C_2 : & (\text{état}=l) \wedge [(x(t) = X_{max}) \vee \\ & (x(t) \in (X_H, X_{max}) \wedge u(Z(t - \Delta t)) \neq 0)] \\ C_3 : & (\text{état}=m) \wedge [(x(t) = X_{min}) \vee \\ & (x(t) \in (X_{min}, X_L) \wedge u(Z(t - \Delta t)) \neq 0)] \end{cases}$$

La notation  $QH_l$  indique le *contrôle supérieur* appliqué quand la chaîne de Markov est dans l'état  $l$ ,  $QL_m$  est le *contrôle inférieur* appliqué en état  $m$ , pendant que  $\Delta t$  représente un intervalle de temps infinitésimal. Il est important de spécifier que pour appliquer le contrôle basé sur les événements,  $QH_l$  et  $QL_m$  seront choisis de tel sorte que :

$$\begin{cases} r_l - QH_l < 0 & , \forall QH_l > 0, l \in \{1, ..N\} \\ r_m + QL_m > 0 & , \forall QL_m > 0, m \in \{1, ..N\} \end{cases}$$



**Figure 3.** Représentation stochastique hybride pour un intégrateur à commutation à deux états avec un contrôle basé sur les événements

Le système décrit par [3] peut également être modélisé par l'automate de la Figure 3. Afin de spécifier la façon dans laquelle les transitions d'un état à l'autre se produisent, nous devons définir les événements qui peuvent intervenir. On note par "événements incontrôlables de la chaîne de Markov" les événements qui sont indépendants

des frontières extrêmes (et des limites d'arrêt du contrôle) et qui font commuter le système entre les états ayant le même type de contrôle (*aucun, supérieur* ou *inférieur*); ces événements sont représentés par  $\sigma_1, \sigma_2$ . On appelle “*événements de contrôle*” les événements qui peuvent changer le type de contrôle appliqué au système. On utilise la notation  $x \uparrow X_{max}$  et  $x \downarrow X_{min}$  pour les événements qui font atteindre respectivement la limite maximale et minimale,  $x \downarrow X_H$  et  $x \uparrow X_L$  quand il faut arrêter le *contrôle supérieur* ou *inférieur*. Ces transitions ont été également marquées de façon discontinue dans la Figure 3.

### 2.3. Critère quadratique de minimisation

Le comportement du système contrôlé décrit, par exemple, par la Figure 2 peut être regardé comme une alternance entre deux processus de renouvellement avec des points de renouvellement  $X_H$  et  $X_L$  (périodiquement le système va “redémarrer” soit dans le point  $X_H$  soit dans le point  $X_L$ ). Le traitement analytique d'un tel système est très difficile par contre ce point de vue nous permet de définir le critère quadratique de minimisation : en effet, la minimisation globale de l'énergie du système repose sur la minimisation de l'énergie sur chaque période de renouvellement (une période de renouvellement est définie par exemple par l'évolution libre du système entre  $X_H$  et  $X_{max}$  suivie par l'évolution contrôlée entre  $X_{max}$  et  $X_H$ , toutes les combinaisons possibles – quatre pour le système considéré – doivent être prises en compte). Puisque la période de renouvellement est inconnue en absence d'un traitement analytique très difficile (une approche numérique pour le calcul du temps de sortie d'une région dans une chaîne de Markov hybride peut être trouvée en (Brandejsky *et al.*, n.d.)), on choisit pour la simulation de minimiser le critère équivalent qui est la moyenne statistique de l'énergie par unité de temps en regime asymptotique qui peut être également exprimée par la formule [2]. Par ailleurs cette formule peut être calculée directement au cours de la simulation.

La résolution analytique du problème de commande optimale est très difficile même pour un système simple. En raison du caractère stochastique du problème, de l'horizon infini et du fait que les coûts (taux d'évolution  $r_i$ ) ne sont pas du même signe, une approche directe par programmation dynamique de résolution d'une équation Hamilton-Jacobi-Bellman est difficile. Une solution basée sur un modèle approché et une optimisation non-linéaire a été proposée en (Mihaita *et al.*, 2011). Dans ce papier on propose une résolution du modèle exact par simulation à événements discrets.

## 3. Simulation en temps continu

La simulation des systèmes stochastiques à commutation est une technique importante pour comprendre et analyser le comportement du système. Par rapport aux simulations discrètes, la simulation en temps continu aide à réduire le temps d'exécution et l'accès aux ressources de mémoire (le nombre d'événements en simulation

est réduit par rapport à une simulation en temps discret). Comme indiqué dans l'introduction, nous avons adapté l'algorithme de simulation pour des lignes de production en tandem fournis par (Suri *et al.*, 1991) aux conditions de contrôle décrites dans la section précédente. Ensuite nous présentons l'algorithme de contrôle adapté pour le système intégrateur à états multiples [1]. En raison de l'occurrence aléatoire des transitions entre les états du système, des statistiques sont également calculées à certains instants de temps réguliers. Une période statistique est choisie pour laquelle nous calculons les statistiques sur la variable d'état ; cette méthode sera utile dans l'étape de validation. Nous allons définir les paramètres principaux que nous allons utiliser pour la simulation.

Nous définissons d'abord l'état du système ayant un contrôle basé sur les événements. Soit  $Z(t)$  l'état du système à l'instant  $t$  avec :

$$Z(t) = \begin{cases} iNC, & \text{pour } x(t) \in [X_L, X_H] \text{ et } u_{Z(t)} = 0, i \in \{1, \dots, N\} \\ iHC, & \text{pour } x(t) \in (X_H, X_{max}] \text{ et } u_{Z(t)} = -QH_i \\ iLC, & \text{pour } x(t) \in [X_{min}, X_L] \text{ et } u_{Z(t)} = +QL_i \end{cases} \quad [5]$$

Soit  $N$  le nombre d'états du système,  $X$  la variable d'état en temps continu,  $X_{st}$  les statistiques sur la variable d'état et  $r_i > 0$ ,  $r_j < 0$  les taux de variation positifs et respectivement négatifs associés aux états  $i \in \{1, \dots, M\}$ ,  $j \in \{M + 1, \dots, N\}$ . Quand le contrôle est nécessaire, les paramètres de contrôle seront appliqués de sorte que :  $r_k - QH_k < 0$  et  $r_k + QL_k > 0, \forall k \in \{1, \dots, N\}$ . On définit également l'ensemble des événements possibles pour un état  $s \in Z(t)$  :  $E = \{\{\sigma_s\}, \{NH_{ss}\}, \{HN_{ss}\}, \{NL_{ss}\}, \{LN_{ss}\}\}$  ; chacun de ces événements est défini dans le Tableau 1. On considère  $\lambda_s$  le taux de transition de l'état de départ  $s$  vers l'état suivant déterminé par le prochain événement qui a été choisi,  $T_f$  la longueur de la simulation et  $State$  l'historique des états pendant la simulation avec des valeurs dans l'ensemble  $\{iNC, iHC, iLC\}, i \in \{1, \dots, N\}$ . Le comportement aléatoire du système donne des résultats différents à chaque simulation. Par conséquent plusieurs simulations sont nécessaires en utilisant le même ensemble de données ; soit  $N_r$  le nombre de simulations appliquées.

Symbole	Évènements représentés
$\{\sigma_s\}$	Sortir de l'état $s$ vers un autre état ayant le même type de contrôle
$\{NH_{ss}\}$	Passage de l'état $s$ sans contrôle vers l'état $s$ avec contrôle supérieur
$\{HN_{ss}\}$	Passage de l'état $s$ avec contrôle supérieur vers l'état $s$ sans contrôle
$\{NL_{ss}\}$	Passage de l'état $s$ sans contrôle vers l'état $s$ avec contrôle inférieur
$\{LN_{ss}\}$	Passage de l'état $s$ avec contrôle inférieur vers l'état $s$ sans contrôle

**Tableau 1.** Liste de tous les événements possibles

Il faut également préciser que les événements  $\{\sigma_s\}$  sont caractéristiques à la chaîne de Markov ayant des transitions aléatoires entre les états, alors que  $\{NH_{ss}\}, \{HN_{ss}\}, \{NL_{ss}\}, \{LN_{ss}\}$  sont déclenchés uniquement par les changements de la variable

d'état  $x(t)$  (lorsque les limites extrêmes ou les limites pour arrêter le contrôle sont atteints). Nous avons également pris en compte le fait que chaque événement est lié à une horloge représentant le temps de la prochaine occurrence de cet événement. Quand l'horloge arrive à zéro, l'événement se déclenche apportant des changements dans l'état du système, selon la description ci-dessus. L'ensemble des périodes d'occurrence pour les événements précédents est  $T = \{T_{\sigma_s}, T_{NH_{ss}}, T_{HN_{ss}}, T_{NL_{ss}}, T_{LN_{ss}}\}$ .  $T_{\sigma_s}$  est spécifique à la chaîne de Markov et représente le temps de sortie de l'état  $s$ ; il est un échantillon aléatoire de la distribution exponentielle de taux de transition  $\lambda_s$ . Chaque fois que le système change de type de contrôle,  $T_{\sigma_s}$  est mis à jour de tel sorte que  $T_{\sigma_s} = T_{\sigma_s} - T_{sw}$ , où  $T_{sw} \in \{T_{NH_{ss}}, T_{HN_{ss}}, T_{NL_{ss}}, T_{LN_{ss}}\}$ .

$T_{NH_{ss}}$  représente le prochain temps de changement de type de contrôle pour l'état  $s$  : de *sans contrôle* vers le *contrôle supérieur*; c'est le temps pour atteindre la limite maximale  $X_{max}$  dans l'état  $s$  et on l'exprime  $(X_{max} - X(t))/|r_i|$ .  $T_{HN_{ss}}$  est le temps nécessaire pour arrêter le *contrôle supérieur* dans l'état  $s$  et atteindre  $X_H$ ; on peut l'écrire  $(X(t) - X_H)/|r_s - QH_s|$ . Ensuite  $T_{NL_{ss}}$  est le temps nécessaire pour passer de *sans contrôle* au *contrôle inférieur* et on l'écrit  $(X(t) - X_{min})/|r_s|$ ; il représente en fait le temps mis pour atteindre la limite minimale  $X_{min}$ . Finalement,  $T_{LN_{ss}}$  représente le temps nécessaire pour atteindre  $X_L$  et arrêter le *contrôle inférieur*; il peut être écrit  $(X_L - X(t))/|r_s + QL_s|$ .

Les étapes principales de la simulation sont présentées dans la suite :

### 1. INITIALISATION DES PARAMÈTRES DU SYSTÈME

Les paramètres suivants sont initialisés :  $N, T_f, N_r, X(1), X_{st}(1), r_i > 0, r_j < 0, i \in \{1, ..M\}, j \in \{M + 1, ..N\}$ , la période statistique  $d_{st}$ ; les paramètres de contrôle  $QH_l > 0, QL_m > 0, l, m \in \{1, ..N\}$ ; l'état initial  $State(1)$ ; l'instant initial d'occurrence des événements  $T_{sim}(1)$ ; l'instant initial de temps pour les statistiques  $T_{st}(1)$  avec son index initial  $L_{st} = 1$ ; l'énergie consommée pour appliquer le *haut* et le *bas* contrôle :  $En_{QH} = 0, En_{QL} = 0$ . On initialise aussi les périodes d'occurrence pour les prochains événements à partir de l'état  $s = State(1)$  :  $\{T_{\sigma_s}, T_{NH_{ss}}, T_{HN_{ss}}, T_{NL_{ss}}, T_{LN_{ss}}\}$ .

### 2. CHOISIR L'ÉVÉNEMENT SUIVANT

En regardant les événements possibles pour l'état actuel  $s = State(j)$ , le prochain événement à choisir est celui qui correspond au plus court temps d'occurrence :

$$\begin{aligned} \text{tant que } T_{sim}(j) \leq T_f \quad // \text{ choisir le prochain événement possible} \\ \Delta t = \min\{T_{\sigma_s}, T_{NH_{ss}}, T_{HN_{ss}}, T_{NL_{ss}}, T_{LN_{ss}}\} \\ \text{next}_{ev} = \text{prochain événement possible correspondant à } \Delta t \\ \text{next}_{ev} \in \{\{\sigma_s\}, \{NH_{ss}\}, \{HN_{ss}\}, \{NL_{ss}\}, \{LN_{ss}\}\} \end{aligned} \quad [6]$$

### 3. ANALYSER L'ÉVÉNEMENT SUIVANT

A partir de l'état actuel du système, on analyse le prochain événement qui a été choisi. Quand  $\text{next}_{ev} = \{\sigma_s\}$  le système commute de l'état actuel  $s$  vers un autre état destination  $d$  ayant le même type de contrôle. L'état  $d$  sera aléatoirement choisi en comparant

les probabilités de transition entre  $s$  et les autres états de la chaîne ( $p_{s,i}, \{s, i \in Z(t)\}$ ) ayant le même type de contrôle ( $p_{i,i} = 0$ ). Le prochain temps d'occurrence  $T_{\sigma_s}$  deviendra un échantillon de la distribution exponentielle du temps de séjour dans le prochain état  $d$ . D'autre part, quand on change le type de contrôle pour l'état  $s$ ,  $T_{\sigma_s} = T_{\sigma_s} - \Delta t$ .

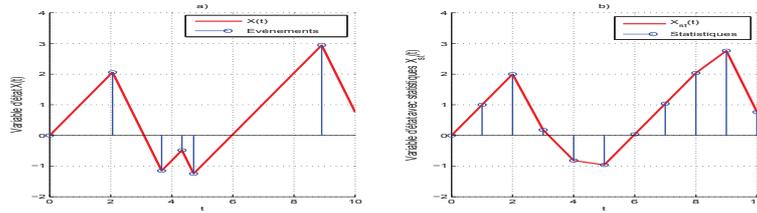
cas  $next_{ev} = \{\sigma_s\}$   
 $X(j) \in [X_L, X_H]$   
 $State(j) = mNC, m \in \{1, \dots, N\}$  //aucun contrôle  
 $State(j+1) = dNC$  // choix aléatoire selon  $p_{mNC, nNC}, n \in \{1, \dots, N\}$   
 Calculer  $T_{\sigma_d}, T_{NH_{dd}}, T_{NL_{dd}}$   
 $X(j) \in (X_H, X_{max})$   
 $State(j) = mNC, m \in \{1, \dots, N\}$  //aucun contrôle  
 $State(j+1) = dNC$  // choix aléatoire selon  $p_{mNC, nNC}, n \in \{1, \dots, N\}$   
 Calculer  $T_{\sigma_d}, T_{NH_{dd}}, T_{NL_{dd}}$   
 $State(j) = mHC, m \in \{1, \dots, N\}$  //continuer le *contrôle supérieur*  
 $State(j+1) = dHC$  // choix aléatoire selon  $p_{mNC, nNC}, n \in \{1, \dots, N\}$   
 Calculer  $T_{\sigma_d}, T_{HN_{dd}}$   
 $X(j) = X_{max}$  // appliquer le *contrôle supérieur*  
 $State(j) = mHC, m \in \{1, \dots, N\}$   
 $State(j+1) = dHC$  // choix aléatoire selon  $p_{mNC, nNC}, n \in \{1, \dots, N\}$   
 Calculer  $T_{\sigma_d}, T_{HN_{dd}}$   
 $X(j) \in (X_{min}, X_L)$   
 $State(j) = mNC, m \in \{1, \dots, N\}$  //aucun contrôle  
 $State(j+1) = dNC$  // choix aléatoire selon  $p_{mNC, nNC}, n \in \{1, \dots, N\}$   
 Calculer  $T_{\sigma_d}, T_{NH_{dd}}, T_{NL_{dd}}$   
 $State(j) = mLC, m \in \{1, \dots, N\}$  // continuer le *contrôle inférieur*  
 $State(j+1) = dLC$  // choix aléatoire selon  $p_{mNC, nNC}, n \in \{1, \dots, N\}$   
 Calculer  $T_{\sigma_d}, T_{LN_{dd}}$   
 $X(j) = X_{min}$  // appliquer le *contrôle inférieur*  
 $State(j) = mLC, m \in \{1, \dots, N\}$   
 $State(j+1) = dLC$  // choix aléatoire selon  $p_{mNC, nNC}, n \in \{1, \dots, N\}$   
 Calculer  $T_{\sigma_d}, T_{LN_{dd}}$   
 cas  $next_{ev} = \{NH_{ss}\}$  // commute vers le *contrôle supérieur*  
 $X(j) \in (X_{min}, X_{max})$   
 $State(j) = mNC, m \in \{1, \dots, N\}$   
 $State(j+1) = mHC$   
 Mise à jour de  $T_{\sigma_s} = T_{\sigma_s} - \Delta t$ , Calculer  $T_{NH_{ss}}$   
 cas  $next_{ev} = \{NL_{ss}\}$  //commute vers le *contrôle inférieur*  
 $X(j) \in (X_{min}, X_{max})$   
 $State(j) = mNC, m \in \{1, \dots, N\}$   
 $State(j+1) = mLC$   
 Mise à jour de  $T_{\sigma_s} = T_{\sigma_s} - \Delta t$ , Calculer  $T_{NL_{ss}}$

cas  $next_{ev} = \{HN_{ss}\}$  // arrêter le *contrôle supérieur*  
 $X(j) \in (X_H, X_{max}]$   
 $State(j) = mHC, m \in \{1, \dots, N\}$   
 $State(j+1) = mNC$   
Mise à jour de  $T_{\sigma_s} = T_{\sigma_s} - \Delta t$ , Calculer  $T_{HN_{ss}}$   
cas  $next_{ev} = \{LN_{ss}\}$  // arrêter le *contrôle inférieur*  
 $X(j) \in [X_{min}, X_L)$   
 $State(j) = mLC, m \in \{1, \dots, N\}$   
 $State(j+1) = mNC$   
Mise à jour de  $T_{\sigma_s} = T_{\sigma_s} - \Delta t$ , Calculer  $T_{LN_{ss}}$

#### 4. MISE À JOUR DU SYSTÈME

Une fois que le prochain événement a été choisi et analysé, une mise à jour est nécessaire pour la variable d'état et pour le temps d'occurrence des événements.  $r_s$  est le taux de variation associé à l'état actuel  $s$  qui peut prendre des valeurs différentes :  $r_s \in \{r_m, (r_m - QH_m), (r_m + QL_m)\}, m \in \{1, \dots, N\}$ ; (par exemple si le *contrôle supérieur* est appliqué dans l'état  $s$  alors le taux de variation devient  $r_s - QH_s$ ). Les énergies consommées seont également calculées quand on applique le *contrôle supérieur* ou *inférieur* dans l'état  $s$ .

$T_{sim}(j+1) = T_{sim}(j) + \Delta t$ ; // avancer le temps de simulation  
 $X(j+1) = X(j) + r_s \cdot \Delta t$ ; // mise à jour de la variable d'état  
 $En_{QH} = En_{QH} + QH_s^2 \cdot \Delta t$ ; // calcul des énergies consommées  
 $En_{QL} = En_{QL} + QL_s^2 \cdot \Delta t$ ;



**Figure 4.** a) Variable d'état  $X(t)$  b) Variable d'état avec statistiques  $X_{st}(t)$

#### 5. STATISTIQUES

Nous calculons des statistiques sur la variable d'état  $X$  à des intervalles de temps réguliers, selon la période statistique choisie  $d_{st}$ , et non pas à chaque occurrence des événements. Si deux événements consécutifs ont lieu au cours de la même période

statistique, aucune mesure ne sera prise. Un exemple de l'application des statistiques avec  $d_{st} = 1$  est illustré dans la Figure 4.

```

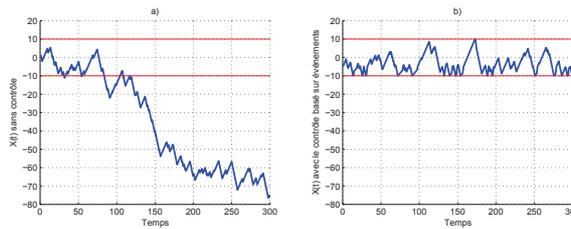
d = floor[(Tsim(j + 1) - Tst(Lst))/dst];
si d = 0 //aucune mesure ne sera prise;
si d ≥ 1 //calcul des statistiques successives
k = 1
tant que k ≤ d
Tst(Lst + k) = Tst(Lst) + k · dst;
Xst(Lst + k) = X(j) + rs * (Tst(Lst + k) - Tsim(j));
k = k + 1;
fin tant que
Lst = Lst + k - 1;
fin si;
j = j + 1; //avancer la simulation
fin tant que //à voir [6]

```

## 6. FIN SIMULATION

A la fin de la simulation nous calculons les statistiques suivantes : la moyenne de la variable d'état ( $X_m$ ), la variance de la variable d'état ( $V_{X_{st}}$ ), l'énergie consommée pour appliquer le contrôle basé sur les événements durant la simulation ( $En_{tot}$ ).

$$\begin{aligned}
X_m &= \text{moyenne}(X); \\
V_{X_{st}} &= \sum_{i=1}^{T_f} X_{st}(i)^2 / T_f; \\
En_{tot} &= (En_{QH} + En_{QL}) / T_f.
\end{aligned}$$

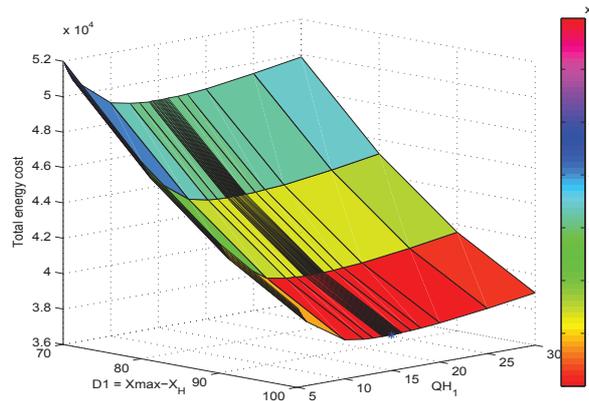


**Figure 5.** Dynamique continue pour : (a) L'intégrateur à commutation non-contrôlé (b) L'intégrateur à commutation avec le contrôle basé sur les événements

On peut facilement suivre l'algorithme de simulation présenté ci-dessus pour un intégrateur à commutation à deux états, en regardant la Figure 3. En revanche, la Figure 5 montre la différence entre le comportement aléatoire d'un système à deux états, avec et sans le contrôle basé sur les événements, pour les données suivantes :  $T_f = 300$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = -2$ ,  $\lambda = 0.4$ ,  $\mu = 0.6$ ,  $QH_1 = QH_2 = 1.5$ ,  $QL_1 = QL_2 = 2.5$ ,  $[X_{min}, X_{max}] = [10, -10]$  et  $[X_L, X_H] = [5, -5]$ .

#### 4. Résultats

Cette section présente un cas d'étude pour la méthode de simulation présentée ci-dessus. Nous considérons un intégrateur à commutation à deux états pour lequel l'algorithme de contrôle basé sur les événements peut fournir une énergie consommée minimale pour appliquer le contrôle. Les simulations sont réalisées en Matlab 7.9.0.529, sur une machine de calcul à quatre cœurs, avec une vitesse de 3GHz et 4GB de RAM. Nous choisissons les paramètres initiaux qui définissent le système : la longueur de la simulation  $T_f = 5000$  (*time units*), le nombre de simulations appliquées  $N_r = 50.000$ , les taux de variation associés aux états ( $r_1 = 5, r_2 = -5$ ), les taux de transition d'un état à l'autre ( $\lambda = 0.4, \mu = 0.6$ ) et la zone de contrôle :  $X_{min} = -100, X_{max} = 100$ . On varie les paramètres de contrôle  $QH_1, QH_2, QL_1, QL_2$  de sorte qu'ils respectent les conditions du contrôle basé sur les événements.



**Figure 6.** Variation d'énergie pour l'intégrateur à commutation considéré

En tenant compte du fait que le système a beaucoup de paramètres qui peuvent varier, nous considérons pour une question de simplicité que  $QH_1 = QH_2 \in \{5.1, 5.2, \dots, 30\}$  et  $QL_1 = QL_2 \in \{5.1, 5.2, \dots, 30\}$ . Nous considérons aussi des différentes variations pour les limites d'arrêt du contrôle ( $X_H \in \{0, 10, 20, 30\}$ ,  $X_L \in \{0, -10, -20, -30\}$ ). La Figure 6 est une représentation graphique du coût énergétique total [2] obtenu en appliquant le contrôle basé sur les événements pour le système considéré. Une valeur minimale de l'énergie est obtenue, qui correspond au paramètre du contrôle  $QH_1 = 14.9$  et à la limite d'arrêt du contrôle  $X_H = 0$ . Une évolution similaire de l'énergie est obtenue pour les intégrateurs à commutation ayant des différents taux de variation et différentes limites d'arrêter le contrôle.

Nous évaluons également l'adaptabilité de l'algorithme de contrôle basé sur les événements en termes de durée de calcul, déterminée par trois paramè-

taux : la longueur de la simulation ( $T_f$ ), le nombre de simulations ( $N_r$ ) et le nombre d'états du système ( $N$ ). Plus explicitement, nous fixons deux des paramètres ci-dessus et nous évaluons comment le temps de calcul évolue avec le troisième paramètre. Les paramètres de contrôle et les frontières de contrôle ont été également considérés fixes. Le Tableau 2 montre la durée de calcul ( $T_c$ ) pour un intégrateur à commutation à deux états sur  $N_r = 100$  simulations ; la période statistique est  $d_{st} = 1$ . Dans ce cas, le temps de calcul est proportionnel à la longueur de la simulation comme représenté dans la Figure 7 (dû à des échelles différentes, les graphiques sont normalisés).

$T_f$	10	50	100	1000	5000
$T_c$	0.45[sec]	0.54[sec]	0.63[sec]	2.57[sec]	15.22[sec]

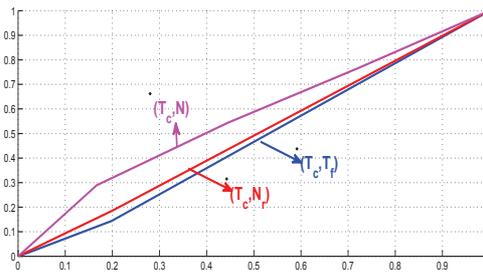
**Tableau 2.** Temps de calcul  $T_c$  en fonction de la longueur de la simulation  $T_f$ .

$N_r$	100	1000	5000	10000	50000
$T_c$	2.57[sec]	22.18[sec]	1.82[min]	3.61[min]	19.4[min]

**Tableau 3.** Temps de calcul  $T_c$  en fonction du nombre de simulations  $N_r$ .

$N$	2	5	10	15	20	30
$T_c$	22.18[sec]	1.61[min]	2.7[min]	3.66[min]	4.66[min]	6.68[min]

**Tableau 4.** Temps de calcul  $T_c$  en fonction du nombre d'états  $N$ .



**Figure 7.**  $T_c$  par rapport à  $T_f$ ,  $N_r$  et  $N$

Pour le même intégrateur à deux états mais avec une longueur fixe de la simulation ( $T_f = 1000$ ), quand le nombre de simulations augmente, le temps de calcul a aussi une augmentation considérable comme il est représenté dans le Tableau 3. Quand le nombre d'états de la chaîne de Markov augmente, nous sommes dans un cas particulier qui est représenté dans le Tableau 4 ; ici la longueur de la simulation et le nombre de simulations sont fixes ( $T_f = 1000$ ,  $N_r = 1000$ ). Dans ce cas, bien que la durée

de calcul dépende largement du nombre d'états de la chaîne de Markov, il n'a pas une augmentation exponentielle. On peut observer l'évolution quasi-linéaire dans la figure 7, qui confirme la complexité réduite de l'algorithme proposé et la possibilité de l'utiliser pour des chaînes de Markov de grande taille.

## 5. Conclusions

Cet article présente une méthode de simulation en temps continu pour les systèmes stochastiques à commutation. En prenant en compte les événements aléatoires qui changent le comportement du système, nous appliquons le contrôle seulement quand il est nécessaire. L'algorithme peut être facilement utilisé pour les intégrateurs stochastiques à commutation à états multiples ; il peut servir comme un procédé perfectionné pour réduire au minimum l'énergie consommée par ces systèmes en appliquant le contrôle. Enfin, il peut être également utilisé comme une méthode de validation des résultats analytiques concernant les systèmes stochastiques à commutation avec le contrôle basé sur les événements.

## Remerciements

On tient à exprimer notre gratitude aux relecteurs anonymes pour leurs remarques constructives et pour nous avoir indiqué les similarités de notre travail avec les recherches des certaines équipes de l'INRIA.

## 6. Bibliographie

- Åström K., « Event based control », in A. Astolfi, L. Marconi (eds), *Analysis and Design of Nonlinear Control Systems*, vol. 3, Springer, Berlin, p. 127-147, 2002.
- Balluchi A., Benvenuti L., Benedetto M. D. D., Miconi G., Pozzi U., Villa T., Wong-Toi H., Sangiovanni-Vincentelli A., « Maximal safe set computation for idle speed control of an automotive engine », *Hybrid Systems : Computation and Control*, Springer, Berlin, p. 32-44, 2000.
- Brandejsky A., de Saporta B., Dufour F., « Numerical methods for the exit time of a piecewise-deterministic Markov process », n.d., INRIA Technical Report.
- Cassandras C. G., « Stochastic Flow Systems : Modeling and Sensitivity Analysis », in C. G. Cassandras, J. Lygeros (eds), *Stochastic Hybrid Systems*, Taylor and Francis, New York, chapter 6, p. 139-164, 2008.
- Cassandras C. G., Lygeros J., *Stochastic Hybrid systems(Automation and Control Engineering)*, Taylor and Francis, New York, 2007.
- de Saporta B., Dufour F., « Numerical method for impulse control of Piecewise Deterministic Markov Processes », n.d.a, INRIA Technical Report.
- de Saporta B., Dufour F., Zhang H., Elegbede C., « Optimal stopping for predictive maintenance », n.d.b, To appear in *Journal of Risk and Reliability*, 2011.

- Egerstedt M., « Behavior based robotics using hybrid automata », *Hybrid Systems : Computation and Control*, Springer, Berlin, p. 103-116, 2000.
- Gibson M., Bruck J., « Efficient exact stochastic simulation chemical systems with many species and many channels », *J. Phys. Chem.*, vol. 104, n° 9, p. 1876-1889, 2000.
- Hespanha J., « Polynomial stochastic hybrid systems », *Hybrid Systems : Computation and Control*, Springer Verlag, Berlin, p. 322-338, 2005.
- Hu J., Wu W., Sastry S., « Modeling subtilin production in bacillus subtilis using stochastic hybrid systems », *Hybrid Systems Computation and Control*, Springer, p. 417 - 31, 2004.
- Khare N. A., Amonlirdviman K., Tree D., Chen W.-S., Axelrod J., Tomlin C., « Mathematical modeling of planar cell polarity to understand domineering nonautonomy », *Science*, vol. 307, n° 5708, p. 423-426, January, 2005.
- Kofman E., Braslavsky J., « Level crossing sampling in feedback stabilization under data-rate constraints », *45th IEEE Conf. on Decision and Control*, p. 4423-4428, 2006.
- Liberzon D., *Switching in Systems and Control*, Birkhauser, Boston, 2003.
- Mihaita A. S., Mocanu S., « An Energy Model for Event-Based Control of a Switched Integrator », *IFAC World Congress, Milano*, 2011.
- Pettersson J., Ledung L., Zhang X., « Decision Support for pulp mill operations based on large-scale optimization », *Control Systems Conf.*, 2006.
- Pola G., Bujorianu M., Lygeros J., Di Benedetto M., « Stochastic hybrid models : An overview », *IFAC Conf. on Analysis and Design of Hybrid Systems*, p. 720-733, 2003.
- Royer A., Évaluation de performances de réseaux de communication à l'aide de chaînes de Markov Hybride, Phd thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2006.
- Salis H., Kaznessis Y., « Accurate hybrid stochastic simulation of a system of coupled chemical or biochemical reactions », *J. Chem. Phys.*, vol. 122, n° 5, p. 54 - 103, 2005.
- Suri R., Fu B.-R., « On using continuous flow lines for performance estimation of discrete production lines », *Proceedings of the Winter Simulation Conf.*, p. 968-977, 1991.
- Tabuada P., « Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks », *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 52, n° 9, p. 1680-1685, 2007.
- Tomlin C., Pappas G., Sastry S., « Conflict resolution for air traffic management : a study in multi-agent hybrid systems », *IEEE Trans. on Aut. Control*, vol. 43, n° 4, p. 509-521, 1998.
- Varaiya P., « Smart cars on smart roads : problems of control », *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 9, n° 52, p. 195-207, 1993.
- Wei K., Tsao Q., Otto N., Determining Buffer Size Requirements Using Stochastic Approximations Methods, Research Report n° SR-89-73, Ford, 1989.
- Wilson H., *Spikes, Decisions, and Actions : The Dynamical Foundations of Neuroscience*, Oxford University Press, USA, 1999.