Approche probabiliste pour la commande orientée événement des systèmes stochastiques à commutation

Simona Adriana MIHĂIŢĂ

Directeurs de thèse

Stéphane MOCANU **Hassane ALLA**

GIPSA-lab, Département Automatique, Grenoble, France

Description du probléme

Systèmes stochastiques à commutation (SSC)

- Changements brusques de comportement
- Défaillances de composants
- Commutations entre divers modes de fonctionnement

→ **Evénements aléatoires**

Exemple introductif

Réservoir d'eau

$$\dot{x}(t) = Q_i(\sigma(t)) - Q_o(\xi(t))$$

Variables qui commutent

Signaux aléatoires de commutation

2 Modes de fonctionnement aléatoires

a) Forte consommation d'eau $Q_i(t) - Q_o(t) < 0$

b) Faible consommation d'eau $Q_i(t) - Q_o(t) > 0$

Exemple introductif

Réservoir d'eau

Politique de contrôle $x(t) \in [X_{\min}, X_{\max}]$

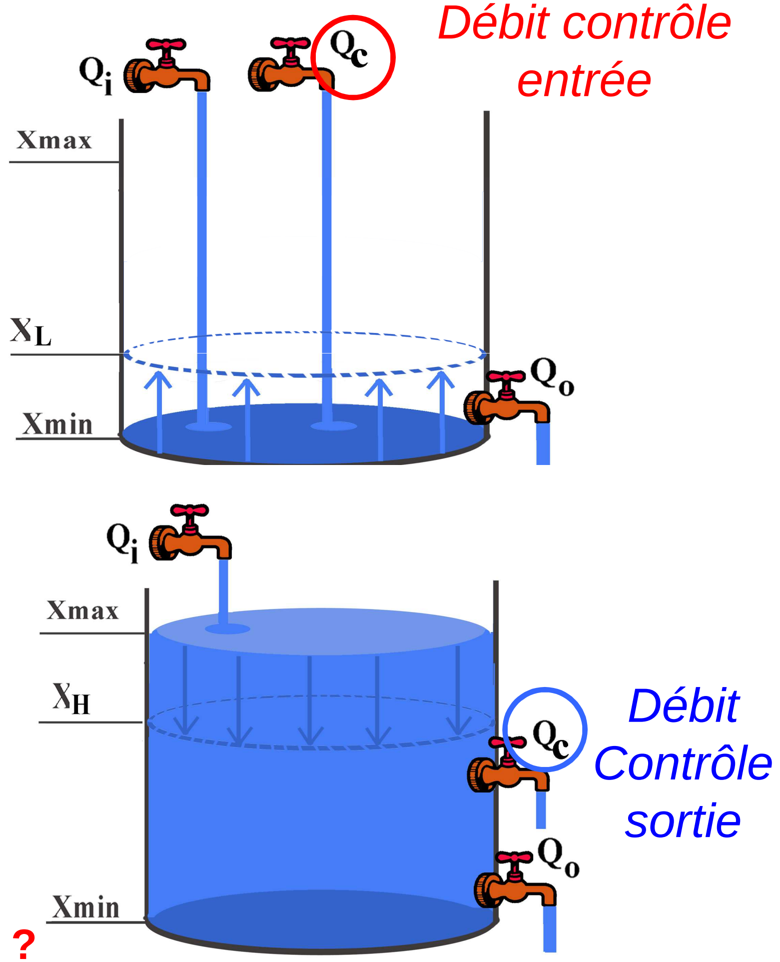
Sporadique = pas de contrôle entre $[X_L, X_H]$

a) Forte consommation d'eau $x(t) = X_{\min}$

$$\dot{x}(t) = Q_i(t) - Q_o(t) + Q_{ce}(t) > 0$$

b) Faible consommation d'eau $x(t) = X_{\max}$

$$\dot{x}(t) = Q_i(t) - Q_o(t) - Q_{co}(t) < 0$$



Comment appliquer le contrôle avec un coût minimal ?

Description du problème

Systèmes stochastiques à commutation (SSC)

Que sont les SSC ?

- systèmes dynamiques hybrides
- systèmes qui commutent en fonction des événements externes
- commutations modélisées par des Chaînes de Markov

Problèmes :

- **Comment analyser la dynamique d'un tel système stochastique ?**
- **Comment appliquer un contrôle qui commute pour ces SSC?**

Description du problème

Contrôle basé sur les événements (CBE)

Pourquoi?

- Il est appliqué seulement si c'est nécessaire
- Il simplifie le système des capteurs
- Il est naturel dans plusieurs domaines

Comment ?

- Définir les événements déclenchants
- Définir une zone de contrôle ***B***
- Appliquer le contrôle quand certaines conditions sont remplies
- Continuer appliquer le contrôle afin que $x(t) \in B$

Problématique

Contrôle basé sur les événements (CBE)

Pourquoi est-ce difficile ?

- Manque des résultats analytiques
- Comment définir les événements déclenchants?
- Comment définir la zone de contrôle ***B* = ?**
- Comment appliquer le contrôle avec une énergie minimale ?
- ***x(t) est un processus périodique avec une période aléatoire***

Plan

1. **Intégrateur stochastique à commutation**
2. **Optimisation par simulation à événements discrets**
3. **Modèle analytique**
4. **Résultats**
5. **Conclusions et perspectives**

Plan

1. **Intégrateur stochastique à commutations**
   - Modèle non contrôlé
   - Modèle avec contrôle
2. **Optimisation par simulation à événements discrets**
3. **Modèle analytique**
4. **Résultats**
5. **Conclusions et perspectives**

1.1 - Intégrateur stochastique à commutation (ISC)

Modèle non – contrôlé :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_{Z(t)} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

→ Chaîne de Markov en temps Continu → Changement entre les N modes du systeme

$$Z(t) \in \{1,2,..,N\}$$

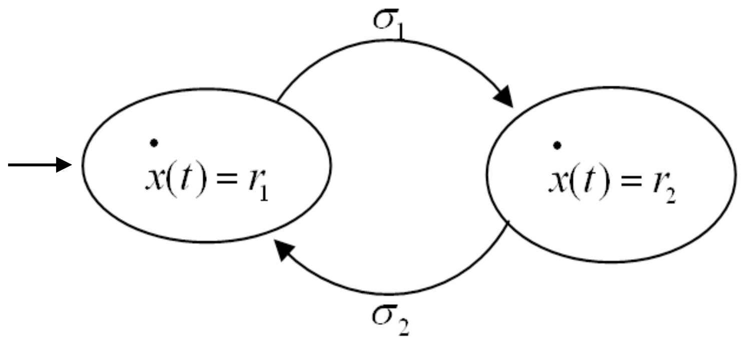
$x(t) \quad Z(t)$ → L'état global du système

$x(t)$: Variable d'état

$Z(t)$: Etat discret du système

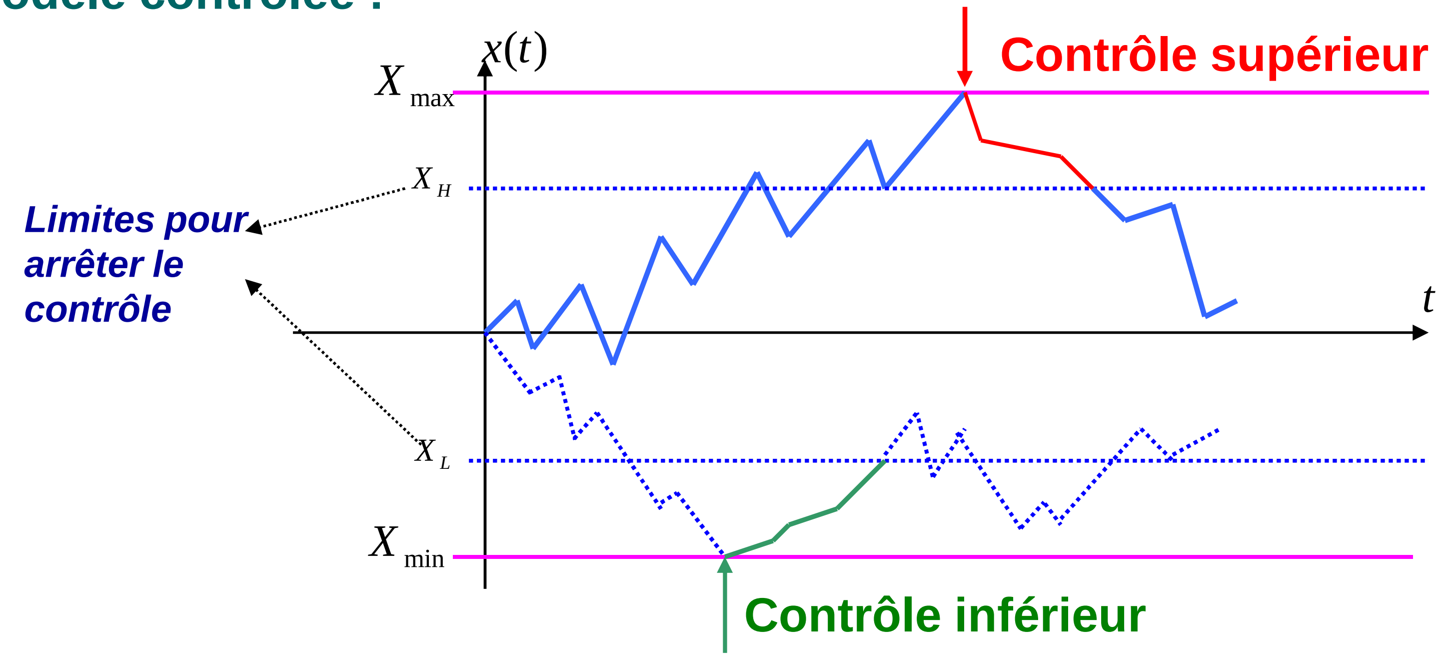
Taux de variation associés aux modes :
$$\begin{cases} r_i > 0, \forall i \in \{1,2,..k\} \\ r_j < 0, \forall j \in \{k+1,..N\} \end{cases}$$

$Z(t) \in \{1,2\}$



1.2 - Intégrateur stochastique à commutation (ISC)

Modèle contrôlée :



Objectif: $x(t) \in [X_{\min}, X_{\max}]$

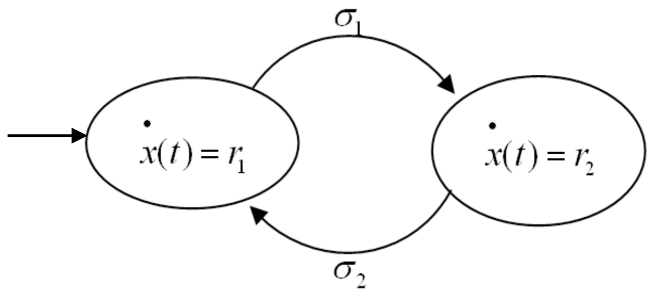
Système contrôlé : $\begin{cases} \dot{x}(t) = r_{Z(t)} + u_{Z(t)}(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

$u_{Z(t)}(x(t))$ sera appliqué de sorte que $\begin{cases} r_{Z(t)} + u_{Z(t)}(x(t)) < 0, & \text{si } x(t) = X_{\max} \\ r_{Z(t)} + u_{Z(t)}(x(t)) > 0, & \text{si } x(t) = X_{\min} \end{cases}$

1.3 – Intégrateur stochastique à commutation à deux états

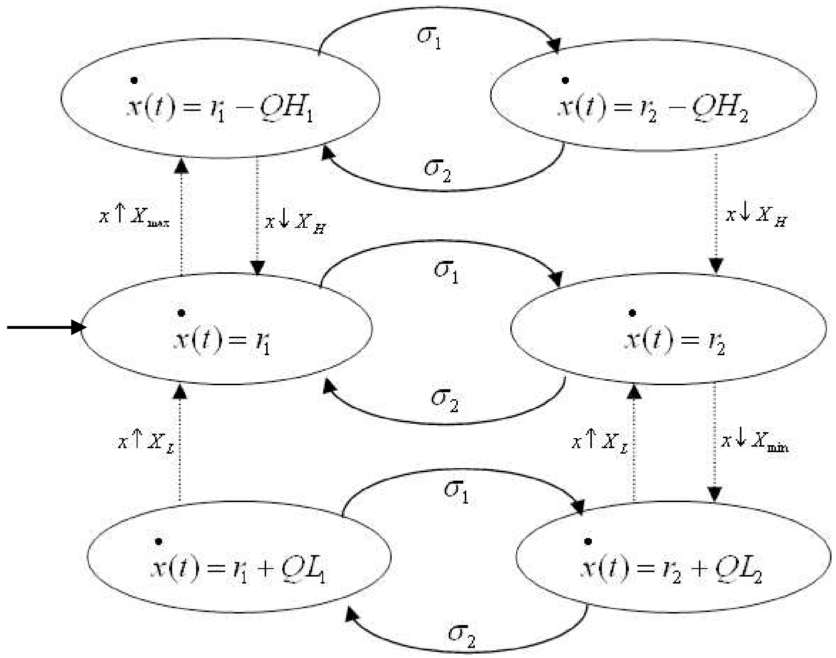
Non-contrôlé :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_{Z(t)} & Z(t) \in \{1,2\} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$



Avec le contrôle basé sur les événements :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_{Z(t)} + u_{Z(t)}(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$



QH_1, QH_2, QL_1, QL_2

Seront choisis de sorte que :

$$\begin{cases} r_i - QH_i < 0 \\ r_j + QL_j > 0 \end{cases}, \text{ i, j} \in \{1,2\}$$

Plan

1. Intégrateur stochastique à commutations

2. **Optimisation par simulation à événements discrets**
   - **Principes**
   - **Application numérique**

3. Modèle analytique

4. Résultats

5. Conclusions et perspectives

2.3 – Optimisation d'un critère quadratique par simulation

- **Integrateur à commutation à deux états**
- **Fixer une zone de contrôle : $[X_{min}, X_{max}]$**
- **Varier les parametres du contrôle : $\{QH_1, QH_2, QL_1, QL_2\}$**
- **Varier les limites pour arrêter le contrôle : {XH,XL}**

- **Chercher les parametres optimaux qui minimisent le coùt quadratique :**

$$J = \lim_{T_f \to \infty} \left(\frac{1}{T_f} E \left[\int_0^{T_f} \left[\underbrace{q \cdot x^2(t)}_{\text{Moment d'ordre 2 de la variable d'état}} + \underbrace{r \cdot u^2(t)}_{\text{Energie consommée pour appliquer le contrôle}} \right] dt \right] \right), \quad q, r > 0$$

On minimise la moyenne statistique de l'énergie par unité de temps

2.1 - Optimisation par simulation à événements discrets

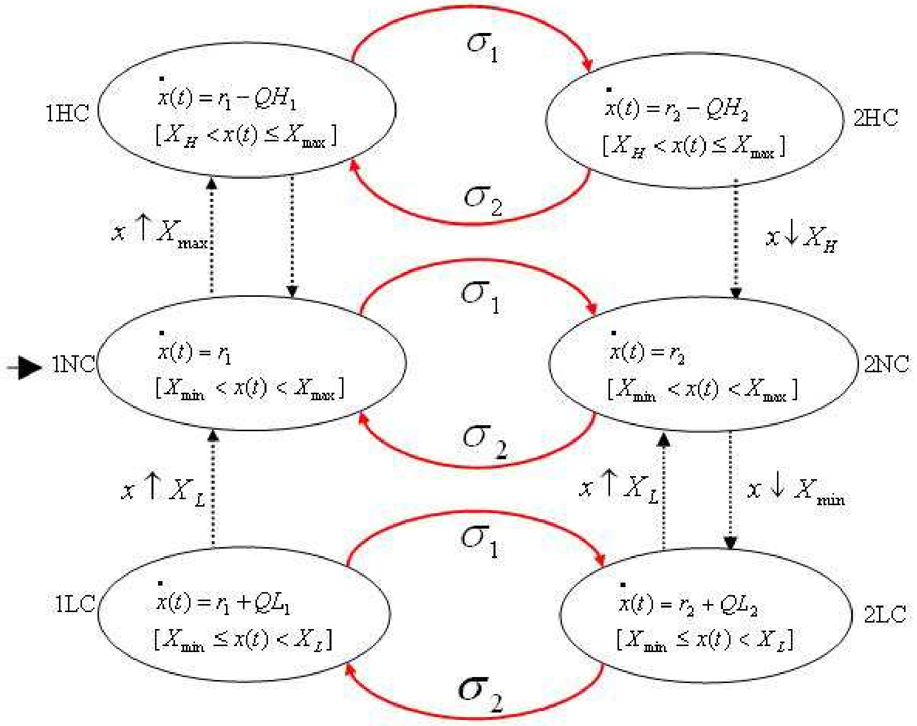
1. Initialiser les paramètres du système :

- Le nombre d'états : N
- La longueur de la simulation : T_f
- Les paramètres du contrôle : $(QH_i, QL_j), \quad i, j \in \{1,\ldots, N\}$
- La liste des événements suivants :
  - **Evénements incontrôlables de la chaîne de Markov** $\{\sigma_s\}$
  - **Evénements de contrôle** $\{NH_{ss}, HN_{ss}, NL_{ss}, LN_{ss}\}$
- Les périodes d'occurrence associés aux événements

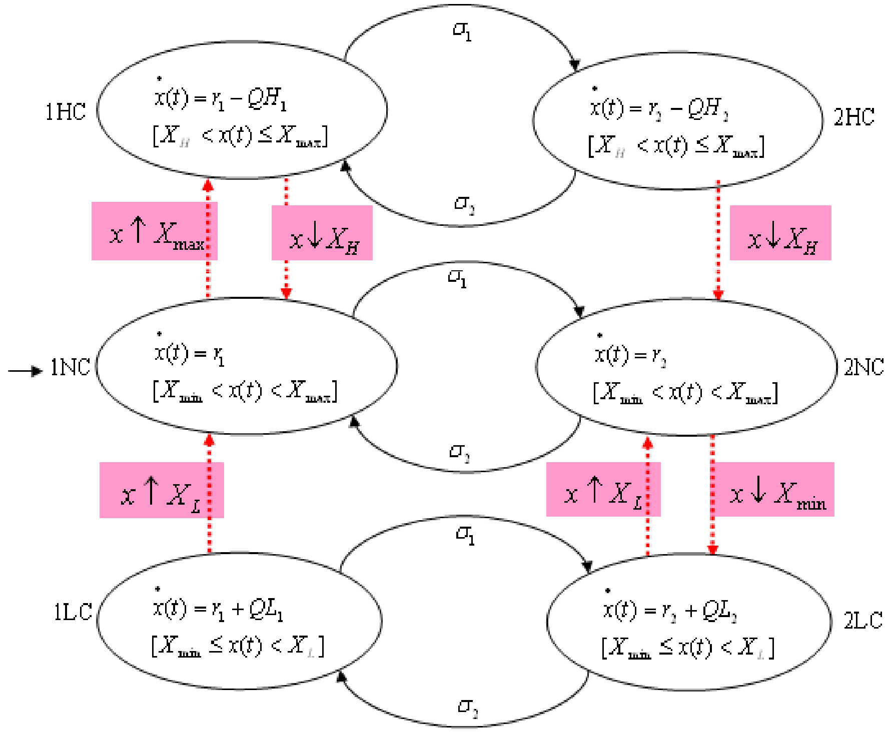
$$\{T_{\sigma_s}, T_{NH_{ss}}, T_{HN_{ss}}, T_{NL_{ss}}, T_{LN_{ss}}\}$$

2.1 - Optimisation par simulation à événements discrets

Evénements incontrôlables de la Chaîne de Markov



Evénements de contrôle



2.1 - Optimisation par simulation à événements discrets

2. Choisir le prochain événement :

$$\Delta t = \min\{T_{\sigma_s}, T_{NH_{ss}}, T_{HN_{ss}}, T_{NL_{ss}}, T_{LN_{ss}}\}$$

$$Next_{ev} = \text{prochain événement possible correspondant à } \Delta t$$

$$Next_{ev} \in \{\{\sigma_s\}, \{NH_{ss}\}, \{HN_{ss}\}, \{NL_{ss}\}, \{LN_{ss}\}\}$$

3. Analyser l'événement suivant:

$Cas \quad \text{Next}_{ev} = \{\sigma_s\}:$

- Commuter vers un autre état
- Calculer les prochains temps d'occurrence

$Cas \quad \text{Next}_{ev} = \{HN_{ss}\}:$

- **Appliquer le contrôle**
- Commuter vers un autre état
- Calculer les prochains temps d'occurrence

………. …..

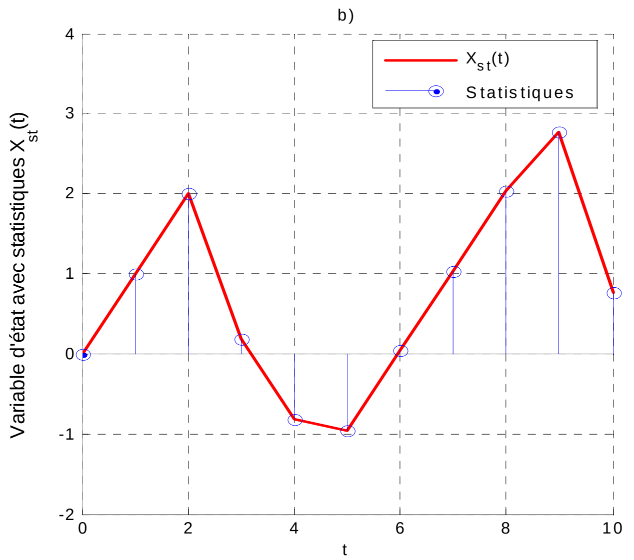
4. Mise à jour du système :

- Avancer la simulation : $T_{sim} = T_{sim} + \Delta t$
- Mise à jour de *x(t)*
- Calcul de l'énergie consommée

2.1 - Optimisation par simulation à événements discrets

5. Statistiques :

(calculer *x(t)* à certains points réguliers avec une certaine fréquence)



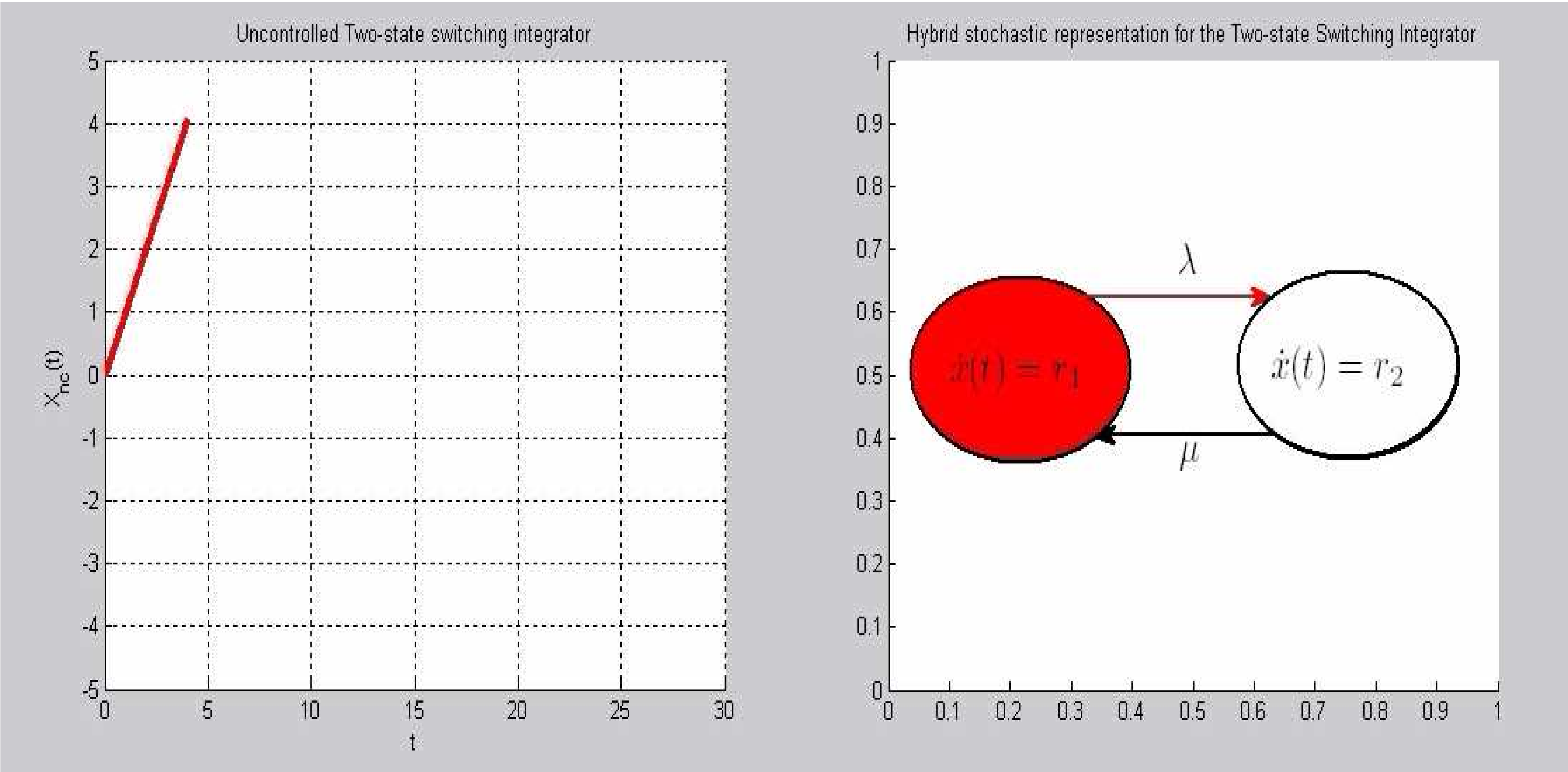
6. Fin simulation

(calcul des mesures de sortie) :

- la moyenne de la variable d'état
- l'énergie totale consommée pour appliquer le contrôle
- etc.

2.2 – Exemples de Simulation événementielle

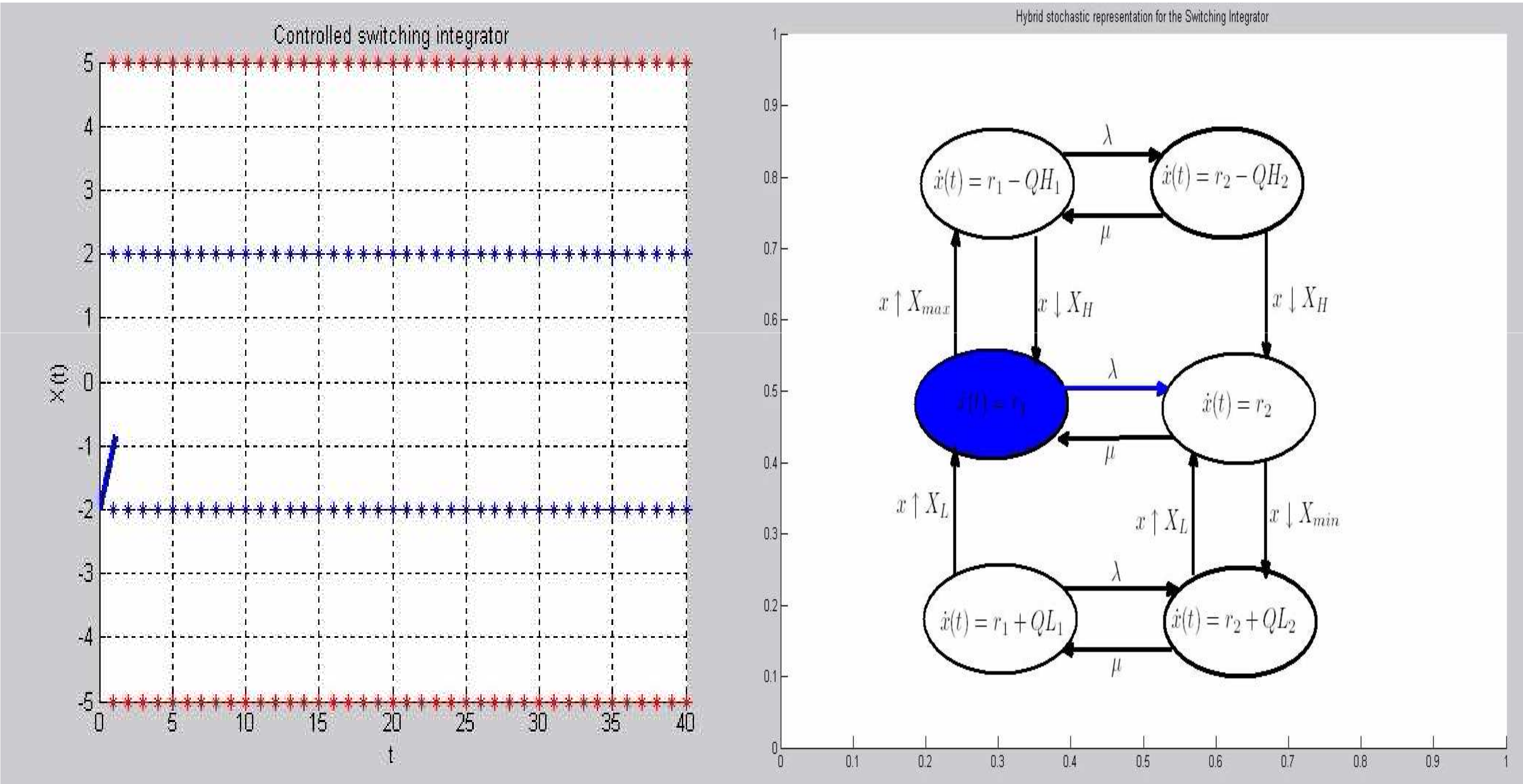
Integrateur stochastique à commutation à deux états non-contrôlé



Nous observons le caractère aléatoire du système dans un temps de simulation assez court

2.2 – Exemples de Simulation événementielle

Integrateur à commutation à deux états contrôlé



Plusieurs simulations sont necessaires sur des longs temps de simulation longs

2.3 – Optimisation d'un critère quadratique par simulation

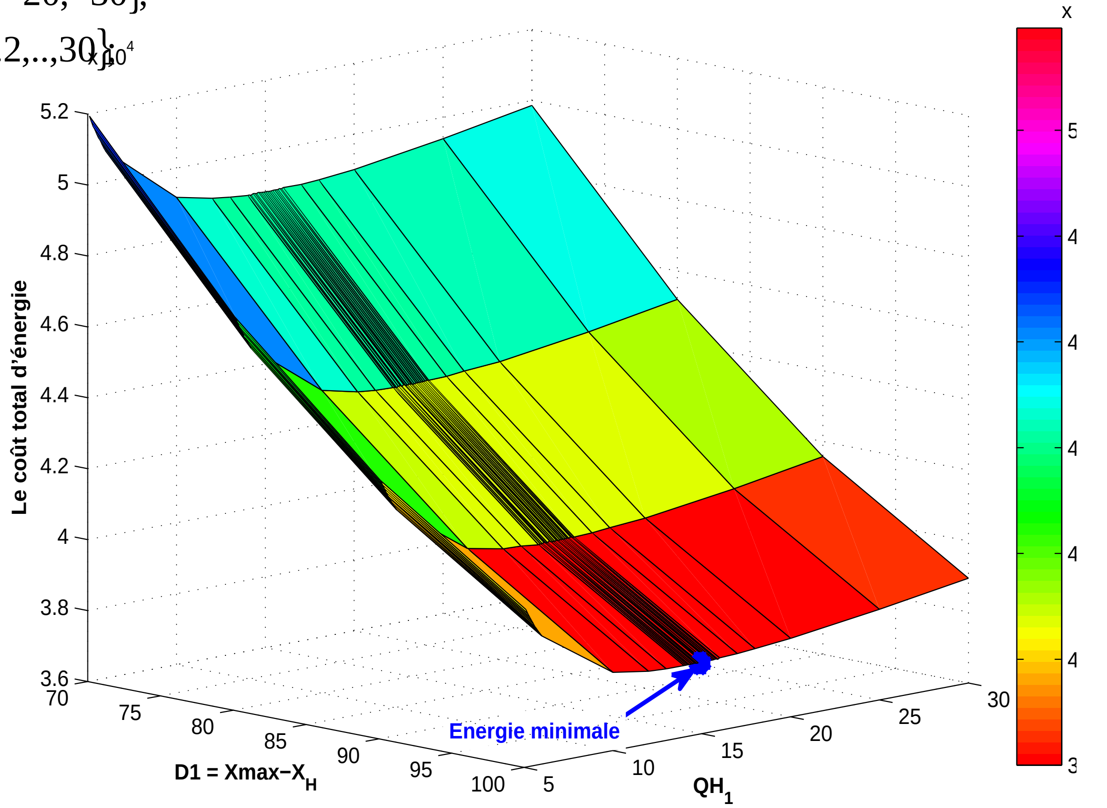
$\mathrm{N} = 50.000,\ \mathrm{Tf} = 5000,$

$r_1 = 5, r_2 = -5, \lambda_{12} = 0.4, \lambda_{21} = 0.6,$

$X_{\max} = 100, X_{\min} = -100,$

$X_H \in \{0,10,20,30\}; X_L \in \{0,-10,-20,-30\};$

$QH_1 = QH_2, QL_1 = QL_2 \in \{5.1, 5.2, .., 30\};$



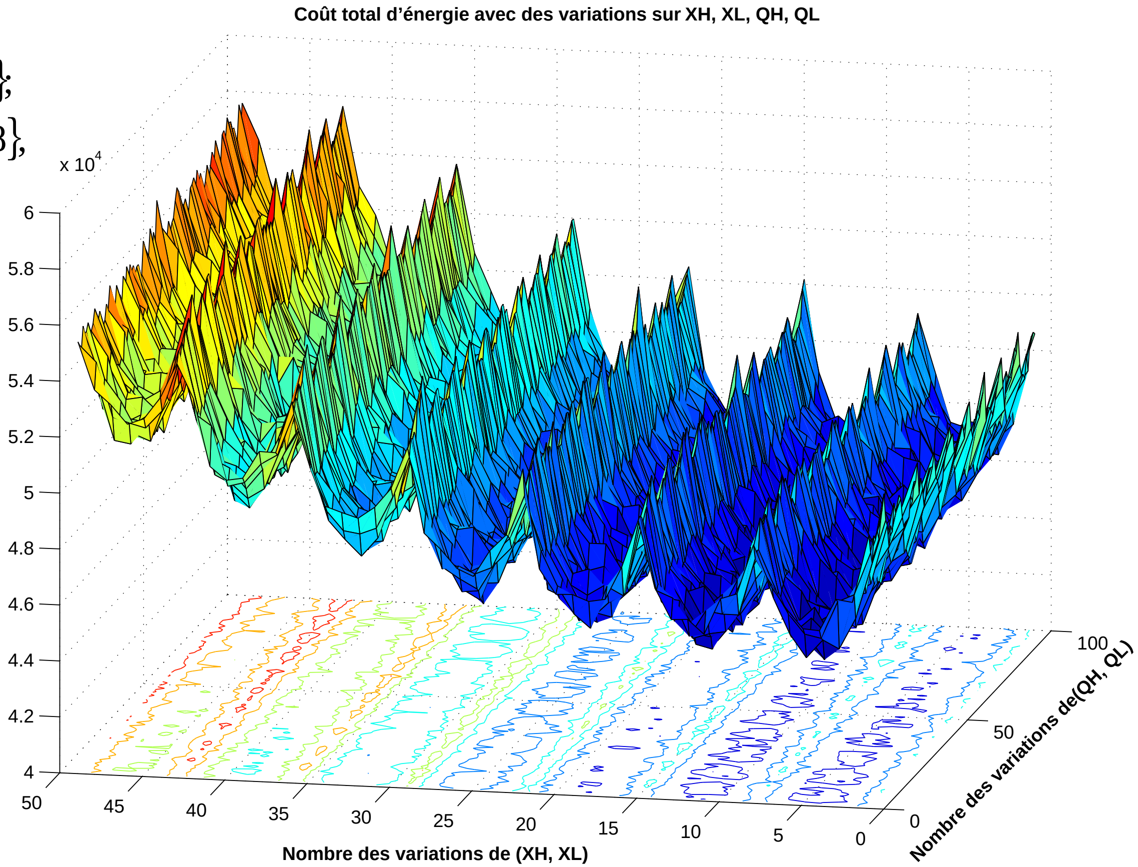
$$\text{Energie minimale obtenue pour} : \{QH_{opt} = 14.9, X_{Hopt} = 0\}$$

2.3 – Optimisation d'un critère quadratique par simulation

Intégrateur à commutation à quatre états

$$\mathrm{N} = 50.000,\ \mathrm{Tf} = 5000,$$
$$r_1 = 7, r_2 = -4, r_3 = 5, r_4 = -2,$$
$$[X_{\min}, X_{\max}] = [0{,}1]$$
$$X_H \in \{0.9, 0.8, \ldots 0.3\}; X_L \in \{0.1, 0.2, \ldots 0.7\};$$
$$QH_1 = QH_2 = QH_3 = QH_4 \in \{7.1, 7.2, \ldots, 8\},$$
$$QL_1 = QL_2 = QL_3 = QL_4 \in \{4.1, 4.2, \ldots, 5\}$$

1 point = une paire de paramètres



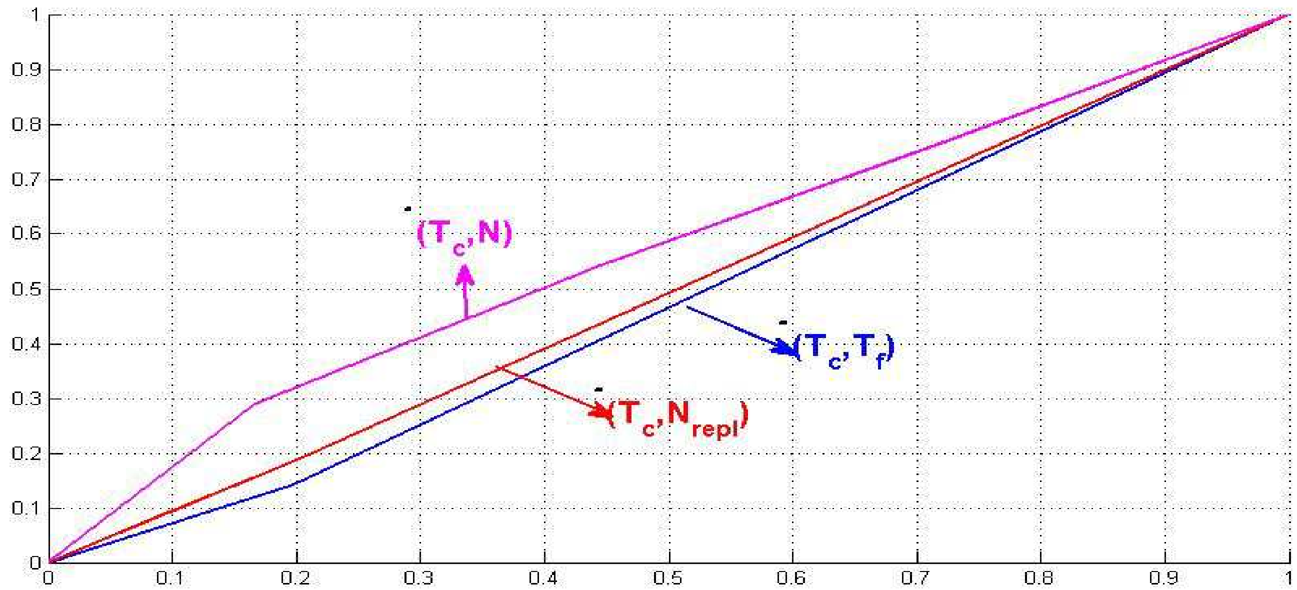
$$\text{Energie minimale obtenue pour} : \{X_{Hopt} = 0.8, X_{Lopt} = 0.4, QH_{1opt} = 7.2, QL_{1opt} = 4.8\}$$

2.3 – Optimisation d'un critère quadratique par simulation

Complexité de l'algorithme :

- Longueur de la simulation *Tf*
- Le nombre de simulations N_r
- Le nombres de modes du système *N*

➡ La durée du calcul Tc = ?



T_c par rapport à N

N	5	10	15	20	**30**
T_c	1.61[min]	2.7[min]	3.66[min]	4.66[min]	6.68[min]

T_f=1000,
N_r=1000

Plan

1. Intégrateur stochastique à commutations
2. Optimisation par simulation à événements discrets
3. **Modèle analytique d'énergie**
   - **Energies**
   - **Moments d'ordre 2 de la variable d'état**
   - **Probabilités de scénarios**
   - **Temps de sortie**
   - **Temps de contrôle**
4. Résultats
5. Conclusions et perspectives

Plan

1. Intégrateur stochastique à commutations

2. Optimisation par simulation à événements discrets

3. **Modèle analytique d'énergie**
   - **Energies**
   - Moments d'ordre 2 de la variable d'état
   - Probabilités de sortie
   - Temps de sortie
   - Temps de contrôle

4. Résultats
5. Conclusions et perspectives

3 - Modèle analytique d'énergie

Critère quadratique de minimisation :

La minimisation globale de l'énergie du système repose sur la minimisation de l'énergie sur chaque **période de redémarrage**

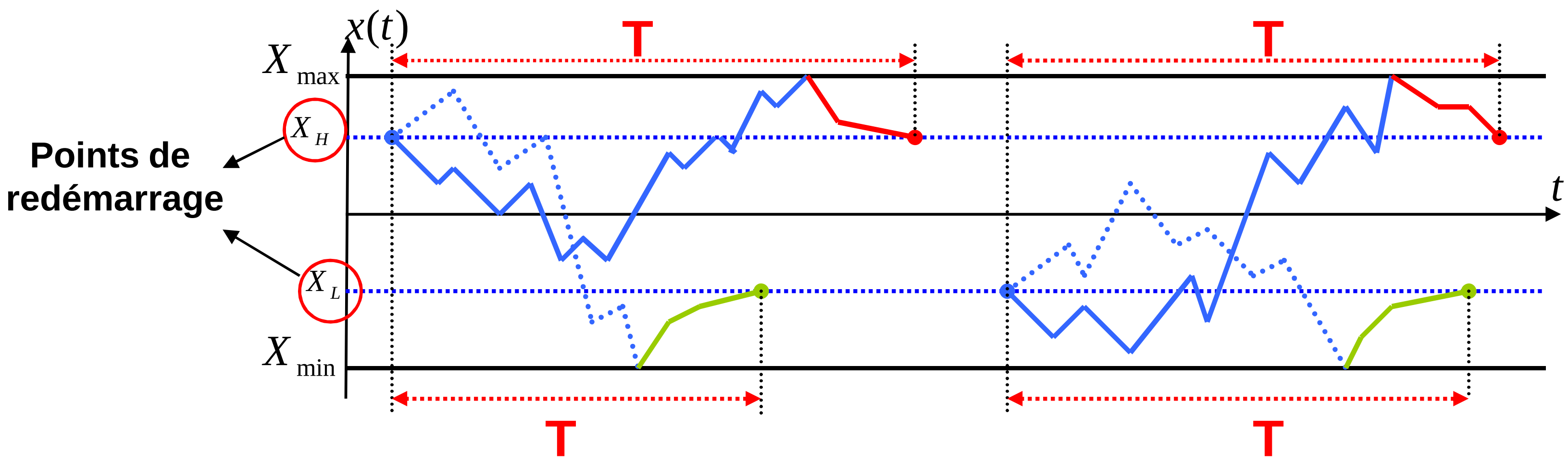
$$J = E\left(\int_0^{T} \left[\underbrace{q \cdot x^2(t)}_{\text{Moment d'ordre 2 de la variable d'état}} + \underbrace{r \cdot u^2(t)}_{\text{Energie consommée pour appliquer le contrôle}} \right] dt \right), \quad q, r > 0$$

?

?

?

3 – Comportement périodique



La commande va forcer le système de retourner en X_H ou en X_L

Problème : *x(t)* est un processus qui redémarre périodiquement en X_H et X_L

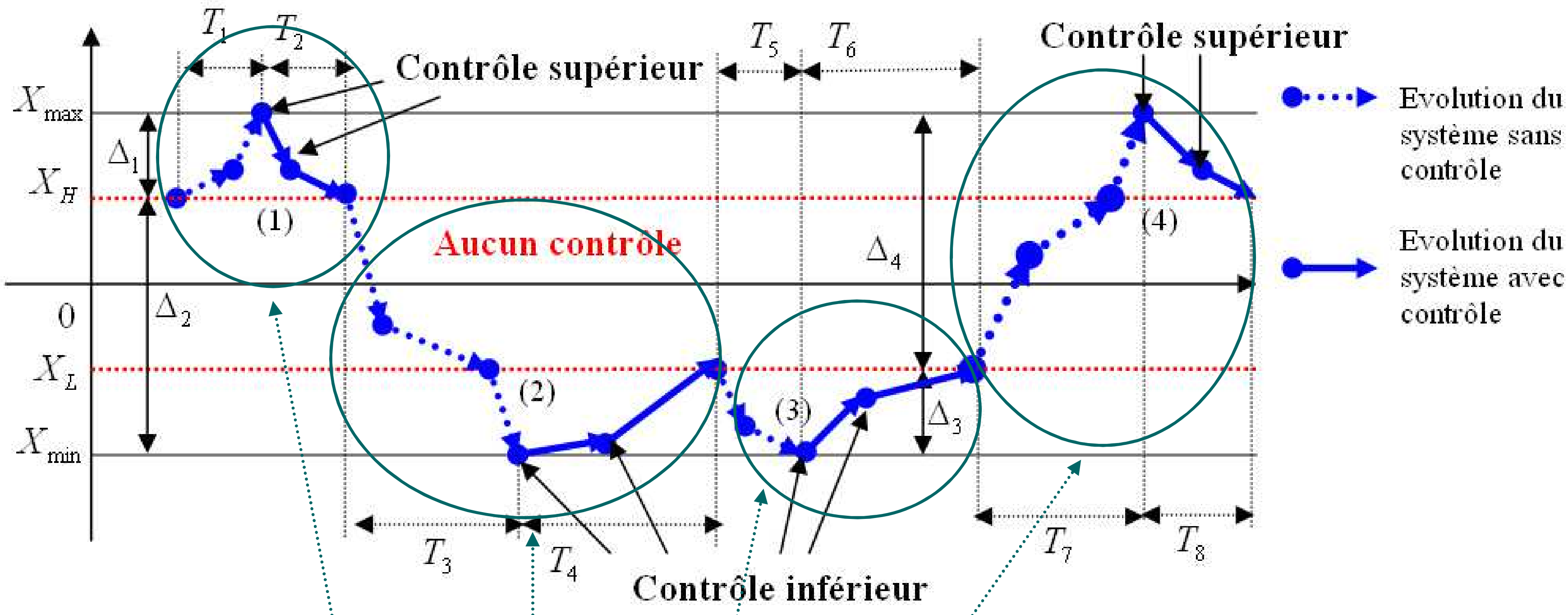
T = période de redémarrage

$$T = T_{sans\_controle} + T_{contrôle}$$

? **?** **?**

3 - Modèle analytique d'énergie

Scénarios d'évolution du système à partir de X_H et X_L



$$En_{tot}^{j} = p_1^j E_1^j + p_2^j E_2^j + p_3^j E_3^j + p_4^j E_4^j$$

Energie totale consommée dans un mode

$$\begin{cases} p_i^j = ? \\ E_i^j = ? \end{cases}$$

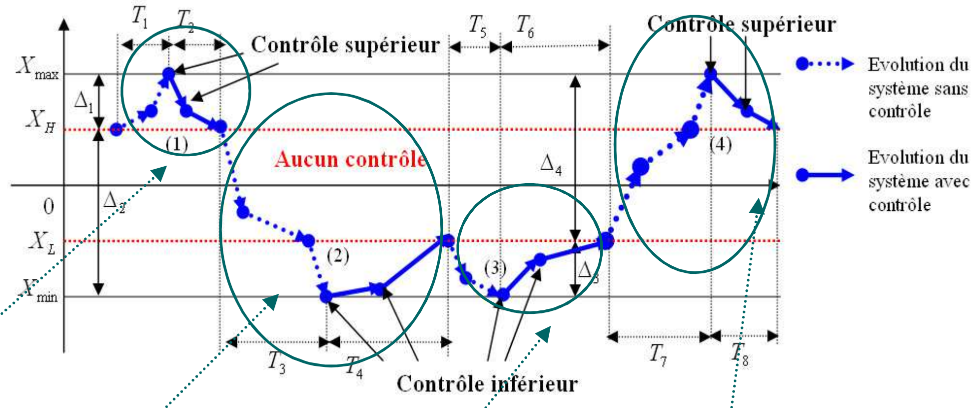
***i* = numéro de scénario (*i* = 1,...4)**

***j* = numéro de mode (*j* = 1,...N)**

3 - Modèle analytique d'énergie

Energies

$$En_{tot}^{j} = p_1^j E_1^j + p_2^j E_2^j + p_3^j E_3^j + p_4^j E_4^j$$



Esperances d'énergies de contrôle:

$$e_1^j = \int_0^{T_2^j} QH_j^2 dt, \text{HC} \rightarrow \text{NC}$$

$$e_2^j = \int_0^{T_4^j} QL_j^2 dt, \ \text{LC} \rightarrow \text{NC}$$

Puissance de contrôle pour un état:

$$E_1^j = \frac{e_1^j}{T}; E_2^j = \frac{e_2^j}{T}; E_3^j = \frac{e_3^j}{T}; E_4^j = \frac{e_4^j}{T}$$

Puissance totale pour un état :

$$En_{tot}^j = p_1^j \frac{e_1^j}{T} + p_2^j \frac{e_2^j}{T} + p_3^j \frac{e_3^j}{T} + p_4^j \frac{e_4^j}{T}$$

?

Puissance totale pour *N* états

$$En_{tot} = \sum_{j=1}^{N} \pi_j En_{tot}^j$$

Critère quadratique de minimisation :

$$J = q \cdot E[x^2(t)] + r \cdot En_{tot}$$

3 - Modèle analytique d'énergie

Comment calculer :

- les probabilités de chaque scénario : $p_1, p_2, p_3, p_4 = ?$
- les périodes de redémarrage : T =$T_{sans\_contrôle}$ + $T_{contrôle}$?
  - les temps sans contrôle : $T_1, T_3, T_5, T_7 = ?$
  - les temps de contrôle : $T_2 = T_8, T_4 = T_6 = ?$
- le moment d'ordre 2 : $E\left(\int_0^T x^2(t)dt\right) = ?$
- l'énergie de contrôle : $E\left(\int_0^T u^2(t)dt\right) = ?$

Plan

1. Intégrateur stochastique à commutations
2. Simulation événementielle en temps continu
3. **Modèle analytique d’énergie**
   - Energies
   - **Moments d’ordre 2 de la variable d’état**
   - Probabilités de sortie
   - Temps de sortie
   - Temps de contrôle
4. Résultats
5. Conclusions et perspectives

3.1 - Modèle analytique d'énergie

$$J = qE\left(\int_0^T x^2(t)dt\right) + rE\left(\int_0^T u^2(t)dt\right), \quad q, r > 0$$

Energie de contrôle ?

Moment d'ordre 2 de la variable d'état = ?

[Pattipati et all,1995] – études de performabilité sur des systèmes de production

$$\frac{d\vec{m}_n(t)}{dt} = Q\vec{m}_n(t) + n\cdot R\cdot \vec{m}_{n-1}(t)$$

Générateur

R = matrice des taux de variation de signe different!

$$\vec{m}_2(T) = e^{QT}\cdot\vec{m}_2(0) + 2\cdot\int_0^T e^{Q(T-\tau)}\cdot R\cdot\vec{m}_1(\tau)d\tau$$

Plan

1. Intégrateur stochastique à commutations
2. Simulation événementielle en temps continu
3. **Modèle analytique d'énergie**
   - Energies
   - Moments de performabilité
   - **Probabilités de scénarios**
   - Temps de sortie
   - Temps de contrôle
4. Résultats
5. Conclusions et perspectives

3.2 - Modèle analytique d'énergie

Probabilités de scénarios

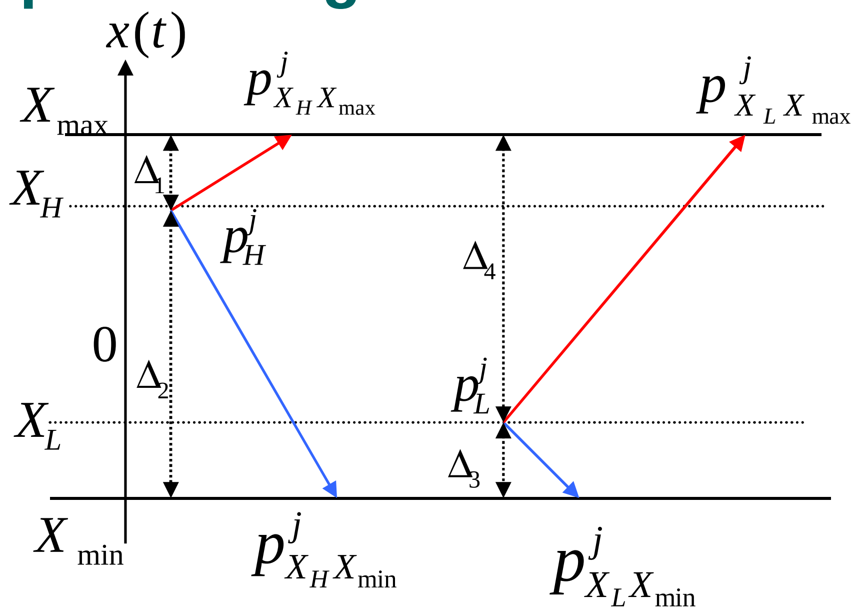
$$En_{tot}^{j} = p_1^j E_1^j + p_2^j E_2^j + p_3^j E_3^j + p_4^j E_4^j$$

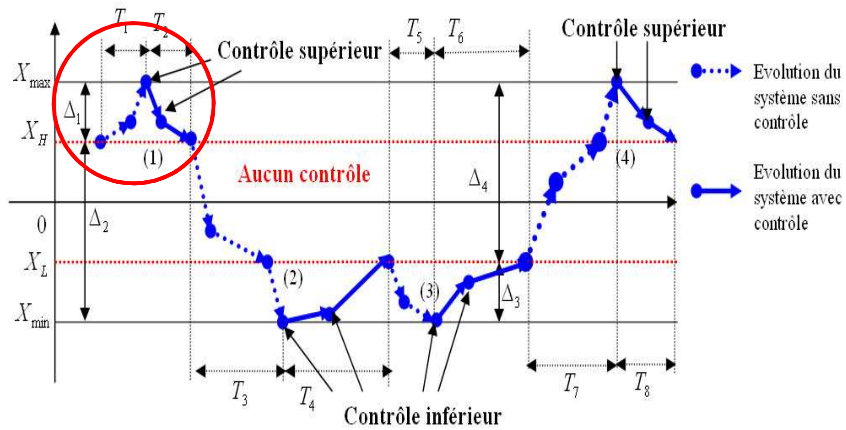
$p^j_{X_H X_{\max}}$ = probabilité d'arriver à X_{max} en partant de X_H dans le mode **j**

p^j_H = probabilité que le système démarre en X_H

$$p_1^j = p_H^j \cdot p^j_{X_H X_{\max}}$$

➡ probabilité que le système démarre en X_H avec la probabilité p_H^j





3.2 - Modèle analytique d'énergie

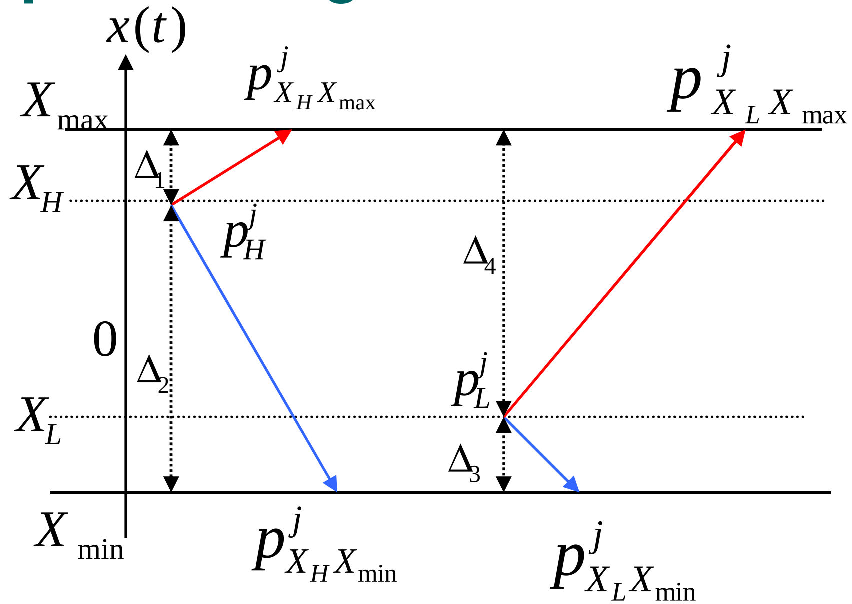
Probabilités de scénarios

Observation

$$\begin{cases} p_H^j = p_H^j \cdot p^j_{X_H X_{\max}} + p_L^j \cdot p^j_{X_L X_{\max}} \\ p_H^j + p_L^j = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_H^j = \dfrac{p^j_{X_L X_{\max}}}{p^j_{X_L X_{\max}} + p^j_{X_H X_{\min}}} \\[2ex] p_L^j = \dfrac{p^j_{X_H X_{\min}}}{p^j_{X_L X_{\max}} + p^j_{X_H X_{\min}}} \end{cases}$$

$$p_1^j = p_H^j \, p^j_{X_H X_{\max}}$$



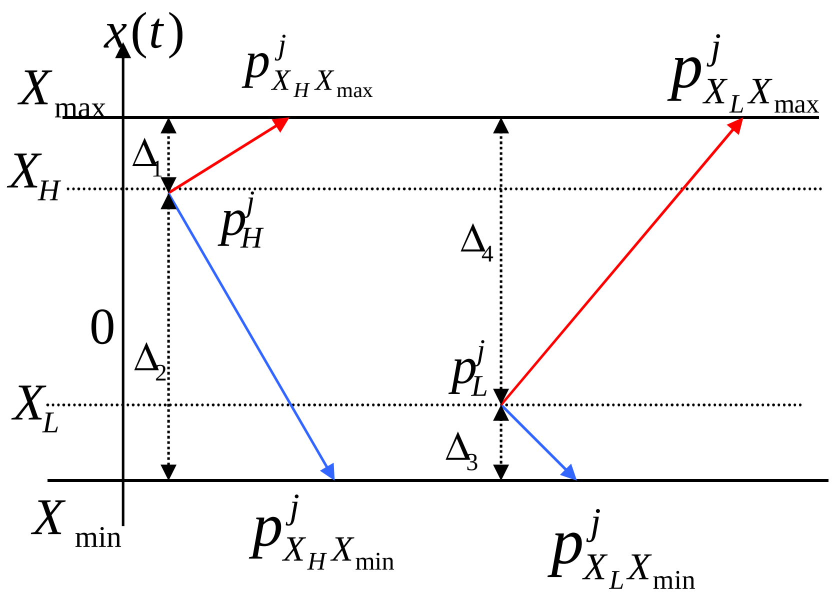
Pour la suite, notons :

$$\begin{cases} \pi_{up}^j(X_H) = P^j_{X_H X_{\max}} \\ \pi_{up}^j(X_L) = P^j_{X_L X_{\max}} \end{cases}$$

3.2 - Modèle analytique d'énergie

Probabilités de scénarios

[Gardiner,2004]



A partir des équations ***Kolmogorov – arrière***

- sans termes de diffusion
- avec des commutations et …

$$R \cdot \frac{d\vec{\pi}_{up}(x)}{dx} + Q^T \cdot \vec{\pi}_{up}(x) = 0$$

Vecteur de probabilités de sortie vers X_{max}

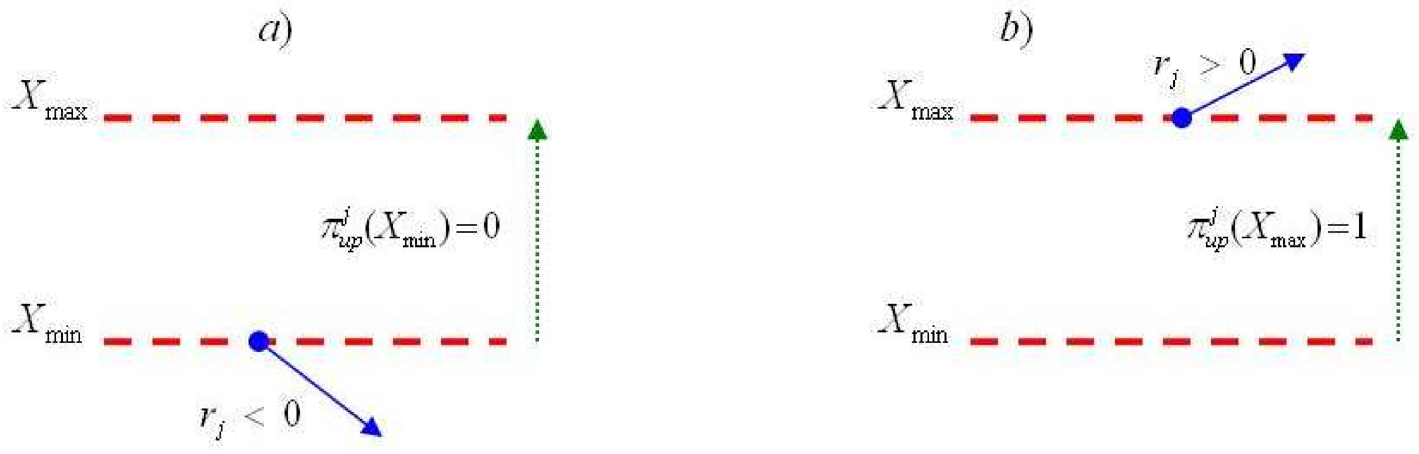
- … des conditions sur les frontieres

3.2 - Modèle analytique d'énergie

Probabilités de scénarios

Conditions aux limites :

$$\begin{cases} \pi_{up}^{j}(X_{\min}) = 0, \text{si } r_j < 0 \\ \pi_{up}^{j}(X_{\max}) = 1, \text{si } r_j > 0 \end{cases}$$



$$R \cdot \frac{d\vec{\pi}_{up}(x)}{dx} + Q^T \cdot \vec{\pi}_{up}(x) = 0 \Rightarrow \vec{\pi}_{up}(x) \Rightarrow p_{X_H} \Rightarrow p_1$$

Idem pour le vecteur de probabilités de sortie vers X_{min}

3 - Modèle analytique d'énergie

Comment calculer :

- les probabilités de chaque scénario : $p_1, p_2, p_3, p_4 = ?$ ✓

- les périodes de redémarrage : T =$T_{sans\_contrôle}$ + $T_{contrôle}$?

  - les temps sans contrôle: T_1 ,... = ?

  - les temps de contrôle : T_2 ,...?

- le moment d'ordre 2 : $$E\left(\int_0^T x^2(t)dt\right) = ?$$

- l'énergie de contrôle : $$E\left(\int_0^T u^2(t)dt\right) = ?$$

Plan

1. Intégrateur stochastique à commutations

2. Optimisation par simulation à événements discrets

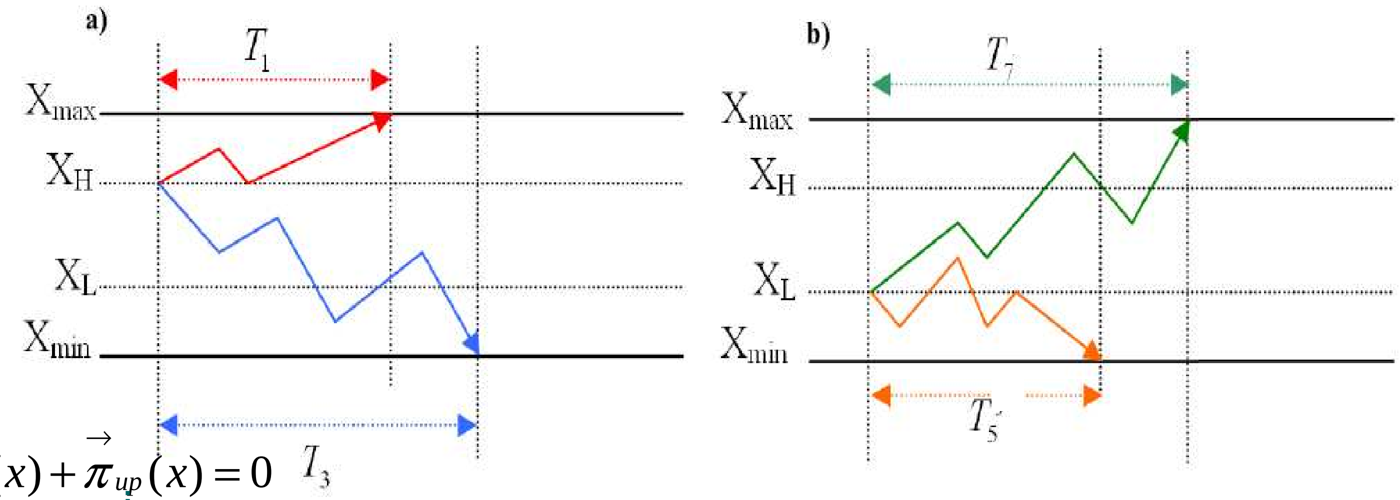
3. **Modèle analytique d'énergie**
   - Energies
   - Moments de performabilité
   - Probabilités de sortie
   - **Temps sans contrôle**
   - Temps de contrôle

4. Résultats
5. Conclusions et perspectives

3.3 - Modèle analytique d'énergie

Temps de sortie de la zone de contrôle

Suite à l'analyse des équations des probabilités de sortie



$$R \cdot \frac{d\vec{\gamma}_{up}(x)}{dx} + Q^T \cdot \vec{\gamma}_{up}(x) + \vec{\pi}_{up}(x) = 0$$

Obtenu précedement

Vecteur de fonctions (temps - probabilité de sortie) $\gamma_{up}^{j}(x) = \pi_{up}^{j}(x) \cdot T_{up}^{j}(x)$

Conditions aux limites :

$$\begin{cases} \gamma_{up}^{j}(X_{\min}) = 0, \text{si } r_j < 0 \\ \gamma_{up}^{j}(X_{\max}) = 0, \text{si } r_j > 0 \end{cases}$$

Idem pour la sortie vers Xmin

Plan

1. Intégrateur stochastique à commutations

2. Optimisation par simulation à événements discrets

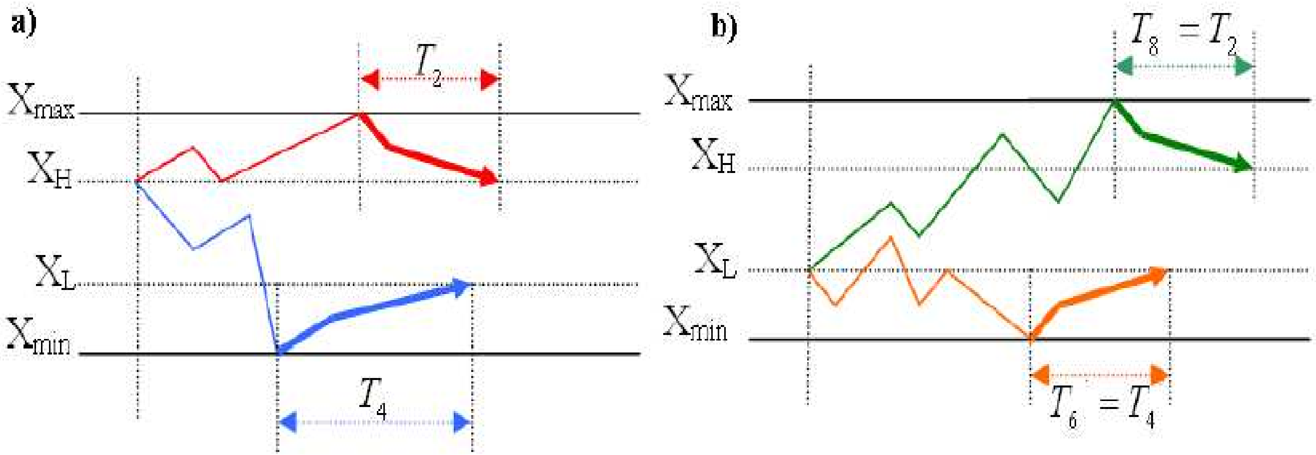
3. **Modèle analytique d'énergie**
   - Energies
   - Moments de performabilité
   - Probabilités de sortie
   - Temps de sortie
   - **Temps de contrôle**

4. Résultats

5. Conclusions et perspectives

3.4 - Modèle analytique d'énergie

Temps de contrôle



$$R_s \cdot \frac{d\vec{T}_2(x)}{dx} + Q^T \cdot \vec{T}_2(x) + \vec{\pi}_{O_{sup}}(x) = 0$$

$\vec{\pi}_{O_{sup}}$: Vecteur initial de probabilités de sortie de la zone de contrôle supérieur

R_s : Matrice des taux de transition avec contrôle (même signe)

$\vec{T}_2$: Vecteur de temps de contrôle supérieur

Condition finale : $T_2(X_H) = 0, \text{si } x(t) \in [X_H, X_{\max}]$

Idem pour le temps de contrôle inférieur

3 - Modèle analytique d'énergie

Comment calculer :

- les probabilités de chaque scénario : $p_1, p_2, p_3, p_4 = ?$

- les périodes de redémarrage : T =T$_{sans_contrôle}$ + T$_{contrôle}$?

  - les temps sans contrôle: T_1 ,... = ?

  - les temps de contrôle : T_2 ,...?

- le moment d'ordre 2 : $E\left(\int_0^T x^2(t)dt\right) = ?$

- l'énergie de contrôle : $E\left(\int_0^T u^2(t)dt\right) = ?$

- coût quadratique : $J = E\left(\int_0^T \left[q \cdot x^2(t) + r \cdot u^2(t)\right]dt\right),$

Plan

1. Intégrateur stochastique à commutations
2. Optimisation par simulation à événements discrets
3. Modèle analytique d'énergie
4. **Résultats**
5. Conclusions et perspectives

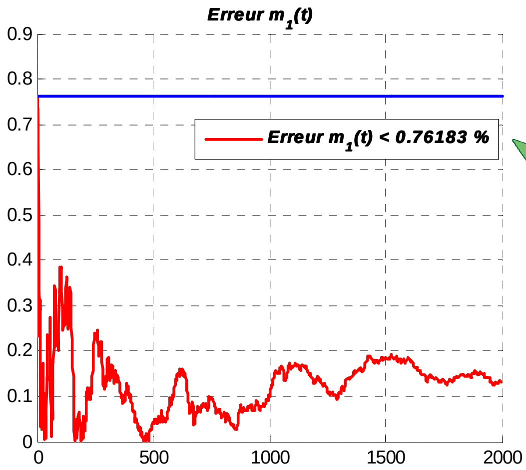
4.1 - Résultats

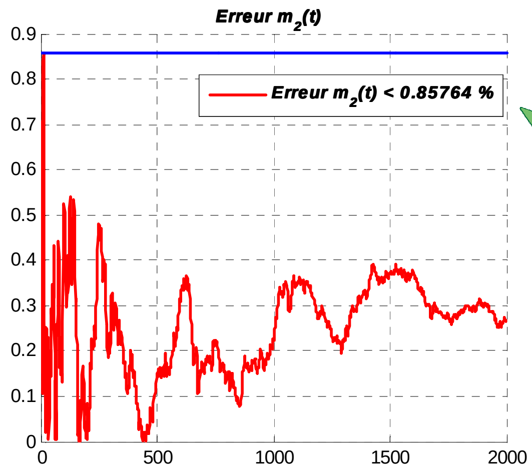
Moments d'ordre 2

ISC à deux états non - contrôlé :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_{Z(t)} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

- les taux de variation : $r_1 = 7, r_2 = -4$
- les taux de transition : $\lambda_{12} = 9, \lambda_{21} = 5$



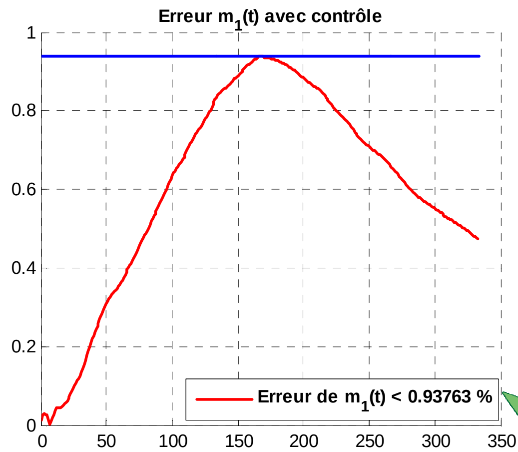


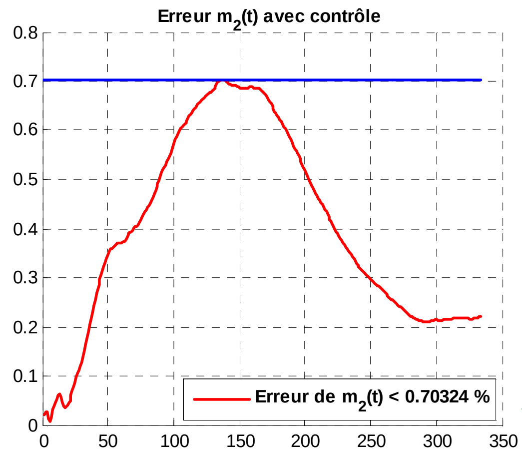
ISC à deux états avec CBE

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_{Z(t)} + u_{Z(t)}(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

- zone de contrôle : $[X_{min}, X_{max}] = [0,1]$
- points d'arrêt du contrôle : $[X_L, X_H] = [0.4, 0.8]$
- les variables de contrôle :

$QH_1 = 8, QH_2 = 0.5, QL_1 = 0.5, QL_2 = 5,$





4.2 - Résultats

Probabilités de scénarios :

Probabilités	Analytique	Simulation	Erreurs[%]
$\pi_{up}^{1}(X_H)$	0.8556	0.8550	0.0678
$\pi_{dw}^{1}(X_H)$	0.1144	0.1150	0.5217
$\pi_{up}^{1}(X_L)$	0.6586	0.6574	0.1670
$\pi_{up}^{2}(X_H)$	0.3414	0.3426	0.3503
$\pi_{dw}^{1}(X_L)$	0.4405	0.4393	0.2724
$\pi_{dw}^{2}(X_H)$	0.5595	0.5607	0.2140
$\pi_{up}^{2}(X_L)$	0.2170	0.2181	0.5044
$\pi_{dw}^{2}(X_L)$	0.7830	0.7819	0.1405

Erreurs < 0.52%

Temps sans contrôle :

Probabilités	Analytique	Simulation	Erreurs[%]
$T_{up}^{1}(X_L)$	0.1278	0.1276	0.1565
$T_{up}^{2}(X_L)$	0.1973	0.1974	0.0507
$T_{up}^{1}(X_H)$	0.0486	0.0482	0.8299
$T_{up}^{2}(X_H)$	0.1792	0.179	0.0116
$T_{dw}^{1}(X_L)$	0.2337	0.2344	0.2986
$T_{dw}^{2}(X_L)$	0.1335	0.1335	0
$T_{dw}^{1}(X_H)$	0.2829	0.2824	0.1771
$T_{dw}^{2}(X_H)$	0.2463	0.2457	0.2436

Erreurs < 0.82%

Temps totaux de contrôle :

Temps de contrôle	Analytique	Simulation	Erreurs[%]
$T_2 = T_8$	0.0819	0.0828	1.08
$T_4 = T_6$	0.1409	0.1425	1.12

Erreurs < 1.12%

4 - Résultats

Coût quadratique total :

Nr	r_1 r_2	λ_{12} λ_{21}	$[X_{min},X_{max}]$	$[X_L,X_H]$	QH_1 QH_2	QL_1 QL_2	Simulation	Analytique	Erreurs[%]
1	3 -2	0.4 0.6	[-10,10]	[-5,5]	4 1	1.08	107.59	107.71	**0.11**
2	5 -6	0.6 0.7	[-20,20]	[-10,10]	6 1	1.12	239.62	240.59	**0.4**

Difficultés numériques !

Zones de contrôle plus grandes

$$[X_{min}, X_{max}] = [-1000{,}1000]$$

$$[X_L, X_H] = [-200{,}200]$$

Temps de sortie

Analytique	Simulation	Erreurs[%]
2948	2931.7	**0.55**
4398	4392.3	**0.12**

Temps de contrôle

Analytique	Simulation	Erreurs[%]
139.7	216.0	**35.34**
304.6	202.87	**33.4**

Plan

1. Intégrateur stochastique à commutations
2. Optimisation par simulation à événements discrets
3. Modèle analytique d'énergie
4. Résultats
5. **Conclusions et perspectives**

Conclusion

Contributions :

- Analyse de SSC avec les Chaînes de Markov en temps continu

- Application du CBE pour un ISC – N modes

- Simulation événementielle en temps continu – benchmark pour des modèles analytiques

- Construction du modèle probabiliste d’énergie en utilisant les
    - Moments de performabilité
    - Probabilités de sortie
    - Temps de sortie
    - Temps de contrôle

Conclusion

Perspectives:

• Méthode d'approximation de calcul pour les probabilités et les temps de sortie/contrôle (afin d'éviter les problèmes numériques)

• Algorithme d'optimisation des paramètres de la commande en vue de la minimisation du critère quadratique

• Généralisation de l'approche analytique pour des SSC plus complexes

Je vous remercie pour votre attention !

Bibliographie

[Liberzon, Morse, 1999] D. Liberzon et A.S. Morse, “Basic Problems in Stability and Design of Switched Systems”, *IEEE Control Systems Magazine,* Oct 1999.

[Suri, R, Fu, 1991] On using continuous flow lines for permanence Estimation of discrete production lines, *Proc. Of 1991 Winter Simulation Conference,NJ, 969-977*

[Pattipati et all, 1995] Performability studies of automated manufacturing systems with multiple part types, *IEEE Transactions On Robotics and Automation, 692-709*

[Gardiner,2004] : Gardiner, C, Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences, Springer Berlin

Annexes

4 - Résultats

Intégrateur stochastique à commutation à deux états :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_{Z(t)} + u_{Z(t)}(x(t)) \\ x(0) = x_0 \qquad Z(t) \in \{1,2\} \end{cases}$$

Energies de contrôle :

Energies	Analytique	Simulation	Erreurs[%]
e_1^1	5.1278	5.1280	0.005
e_1^2	0.0001	0.0001	0
e_2^1	0.0002	0.0002	0
e_2^2	0.1792	0.179	0.0116
En_{tot}	11.6192	11.6158	0.02

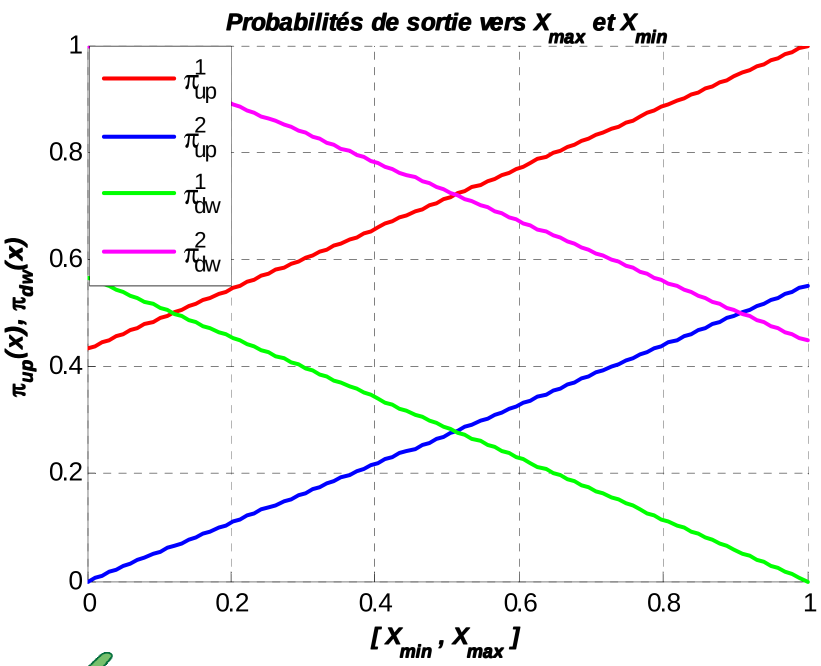
Erreurs < 0.02%

4.2 - Résultats

Probabilités de sortie de la zone de contrôle :

$$R \cdot \frac{d\,\vec{\pi}_{up}(x)}{dx} + Q^T \cdot \vec{\pi}_{up}(x) = 0$$

Probabilités	Analytique	Simulation	Erreurs[%]
$\pi^1_{up}(X_H)$	0.8556	0.8550	**0.0678**
$\pi^1_{dw}(X_H)$	0.1144	0.1150	**0.5217**
$\pi^1_{up}(X_L)$	0.6586	0.6574	**0.1670**
$\pi^2_{up}(X_H)$	0.3414	0.3426	**0.3503**
$\pi^1_{dw}(X_L)$	0.4405	0.4393	**0.2724**
$\pi^2_{dw}(X_H)$	0.5595	0.5607	**0.2140**
$\pi^2_{up}(X_L)$	0.2170	0.2181	**0.5044**
$\pi^2_{dw}(X_L)$	0.7830	0.7819	**0.1405**



Erreurs < 0.52%

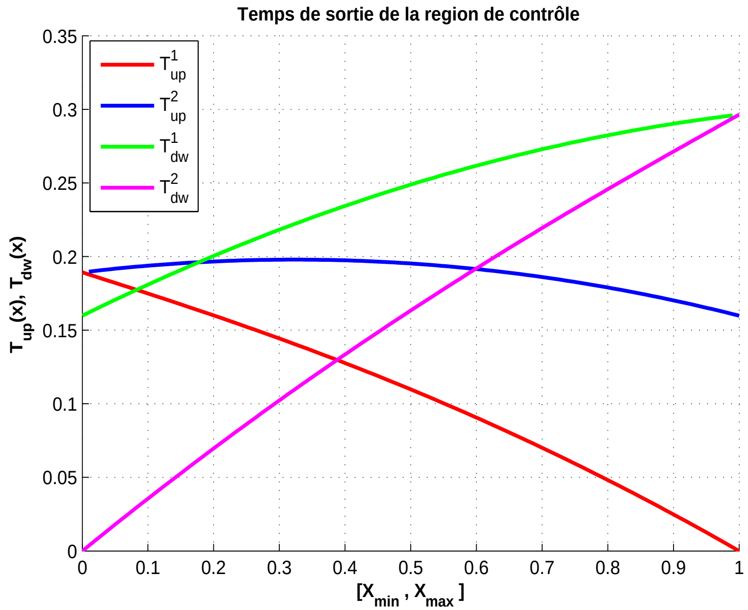
4.3 - Résultats

Temps de sortie de la zone de contrôle :

$$R \cdot \frac{d\,\vec{\gamma}_{up}(x)}{dx} + Q^T \cdot \vec{\gamma}_{up}(x) + \vec{\pi}_{up}(x) = 0$$

$$\gamma_{up}^{j}(x) = \pi_{up}^{j}(x) \cdot T_{up}^{j}(x)$$

Probabilités	Analytique	Simulation	Erreurs[%]
$T_{up}^{1}(X_L)$	0.1278	0.1276	**0.1565**
$T_{up}^{2}(X_L)$	0.1973	0.1974	**0.0507**
$T_{up}^{1}(X_H)$	0.0486	0.0482	**0.8299**
$T_{up}^{2}(X_H)$	0.1792	0.179	**0.0116**
$T_{dw}^{1}(X_L)$	0.2337	0.2344	**0.2986**
$T_{dw}^{2}(X_L)$	0.1335	0.1335	**0**
$T_{dw}^{1}(X_H)$	0.2829	0.2824	**0.1771**
$T_{dw}^{2}(X_H)$	0.2463	0.2457	**0.2436**



Erreurs < 0.82%